*Journal de Théorie des Nombres*
*de Bordeaux* **12** (2000), 367–377

# Hilbert symbols, class groups and quaternion algebras

par TED CHINBURG* et EDUARDO FRIEDMAN**

*To Jacques Martinet*

RÉSUMÉ. Soit $B$ une algèbre de quaternions définie sur un corps de nombres $k$. Nous associons à tout couple de symboles de Hilbert $\{a,b\}$ et $\{c,d\}$ pour $B$ un invariant $\rho = \rho_R\big([\mathcal{D}(a,b)], [\mathcal{D}(c,d)]\big)$ dans un quotient du groupe des classes au sens restreint de $k$. Cet invariant a son origine dans l'étude des sous-groupes finis d'un groupe kleinien arithmétique maximal. Il mesure la distance entre les ordres $\mathcal{D}(a,b)$ et $\mathcal{D}(c,b)$ dans $B$ associés à $\{a,b\}$ et $\{c,d\}$. Si $a = c$, nous calculons $\rho_R([\mathcal{D}(a,b)], [\mathcal{D}(c,d)])$ en termes de l'arithmétique du corps $k(\sqrt{a})$. Le problème d'étendre ce calcul au cas général conduit à l'étude d'un graphe fini lié aux différents symboles de Hilbert pour $B$. Nous considérons en détail un exemple issu de la détermination de la plus petite variété hyperbolique arithmétique de dimension trois.

ABSTRACT. Let $B$ be a quaternion algebra over a number field $k$. To a pair of Hilbert symbols $\{a,b\}$ and $\{c,d\}$ for $B$ we associate an invariant $\rho = \rho_R([\mathcal{D}(a,b)], [\mathcal{D}(c,d)])$ in a quotient of the narrow ideal class group of $k$. This invariant arises from the study of finite subgroups of maximal arithmetic Kleinian groups. It measures the distance between orders $\mathcal{D}(a,b)$ and $\mathcal{D}(c,d)$ in $B$ associated to $\{a,b\}$ and $\{c,d\}$. If $a = c$, we compute $\rho_R([\mathcal{D}(a,b)], [\mathcal{D}(c,d)])$ by means of arithmetic in the field $k(\sqrt{a})$. The problem of extending this algorithm to the general case leads to studying a finite graph associated to different Hilbert symbols for $B$. An example arising from the determination of the smallest arithmetic hyperbolic 3-manifold is discussed.

Manuscrit reçu le 28 février 2000.
* Partially supported by NSF grant DMS97-01411.
** Research partially supported by FONDECYT grant 198-1170 and by a Chilean Presidential Chair grant.

Ted CHINBURG
The University of Pennsylvania
Philadelphia
PA 19104
U. S. A.
*E-mail* : ted@math.upenn.edu

Eduardo FRIEDMAN
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Casilla 653
Santiago 1
Chile
*E-mail* : friedman@uchile.cl