Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **12** (2000), 519–530

Cyclotomic quadratic forms

par François SIGRIST

Résumé. L'algorithme de Voronoï est un procédé permettant d'obtenir la liste complète des formes quadratiques positives parfaites à n variables. Sa généralisation aux G-formes permet de classer les formes G-parfaites, avec l'avantage de se dérouler dans un espace de dimension plus petite (G est un sous-groupe fini de $GL(n, \mathbb{Z})$). On étudie ici la représentation standard du groupe cyclique $G = C_m$ en dimension $\phi(m)$, de polynôme caractéristique $\Phi_m(x)$ (polynôme cyclotomique). Une forme G-invariante est dite forme cyclotomique. Toute les formes G-parfaites sont données pour $\phi(m) < 16$, de même que pour $m = 17$, où la forme cyclotomique la plus dense est entièrement nouvelle. On obtient ainsi une constante d'Hermite cyclotomique, qui s'avère être souvent meilleure que la constante d'Hermite habituelle. C'est le cas pour $m = 5, 7, 11, 13, 16, 17, 36$, et vraisemblablement 32 (les calculs pour $m = 32$ sont en cours, et ont déjà fourni 4600 formes C_{32}-parfaites). Les résultats complets sont disponibles à `http://www.unine.ch/math`.

Abstract. Voronoï 's algorithm is a method for obtaining the complete list of perfect n-dimensional quadratic forms. Its generalization to G-forms has the advantage of running in a lower-dimensional space, and furnishes a finite, and complete, classification of G-perfect forms (G is a finite subgroup of $GL(n, \mathbb{Z})$). We study the standard, $\phi(m)$-dimensional irreducible representation of the cyclic group C_m of order m, and give the, often new, densest G-forms. Perfect cyclotomic forms are completely classified for $\phi(m) < 16$ and for $m = 17$. As a consequence, we obtain precise upper bounds for the Hermite invariant of cyclotomic forms in this range. These bounds are often better than the known or conjectural values of the Hermite constant for the corresponding dimensions; this is indeed the case for $m = 5, 7, 11, 13, 16, 17, 36$. The complete results can be taken from `http://www.unine.ch/math`.

Manuscrit reçu le 29 février 2000.
Supported by FNSRS grant 056816.99.

François SIGRIST
Institut de Mathématiques
Université de Neuchâtel
Rue Emile Argand 11
CH-2007 Neuchâtel
Switzerland
E-mail : francois.sigrist@maths.unine.ch