Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **12** (2000), 581–595

Valeurs zêta multiples. Une introduction

par Michel WALDSCHMIDT

À Jacques Martinet, pour ses 60 ans

Résumé. Soit $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$ un k-uplet d'entiers positifs avec $k \geq 1$. Pour $s_1 \geq 2$, la série

$$\sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} n_1^{-s_1} \cdots n_k^{-s_k}$$

converge et sa somme est notée $\zeta(\underline{s})$. Dans le cas $k = 1$ il s'agit simplement des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers positifs. Quelles relations algébriques existent entre ces nombres? Le produit $\zeta(\underline{s}')\zeta(\underline{s}'')$ de deux valeurs de fonctions zêta multiples est une combinaison linéaire de $\zeta(\underline{s})$, comme on le voit facilement en multipliant les séries : c'est le *produit de mélange lié aux séries.* D'autre part une autre expression pour le nombre $\zeta(\underline{s})$ est donnée par une intégrale itérée (intégrale de Chen); cela fournit une autre relation quadratique exprimant de nouveau le produit $\zeta(\underline{s}')\zeta(\underline{s}'')$ comme une combinaison linéaire de $\zeta(\underline{s})$: c'est le *produit de mélange lié aux intégrales.* On conjecture que ces deux produits de mélange suffisent à décrire toutes les relations algébriques entre les nombres $\zeta(\underline{s})$. Se pose alors le problème d'étudier l'algèbre engendrée par des générateurs (les *multizêta symboliques*) indexés par les k-uplets $\underline{s}$ et définie par les relations données par ces deux produits de mélange; on obtient ainsi l'algèbre MZV, dont Écalle est en train de déterminer la structure. Pour définir des séries génératrices permettant de coder simultanément tous les multizêta symboliques il convient d'inclure les $\underline{s}$ correspondant à des séries divergentes (avec $s_1 = 1$). Nous mentionnons enfin brièvement quelques résultats de l'équipe de Petitot sur les polylogarithmes, et encore plus brièvement plusieurs sujets connexes.

Abstract. For positive integers $s_1, \ldots, s_k$ with $s_1 \geq 2$, the series

$$\sum_{n_1 > \cdots > n_k \geq 1} n_1^{-s_1} \cdots n_k^{-s_k}$$

converges and its sum is denoted by $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$. In case $k = 1$

Manuscrit reçu le 15 mars 2000.

this is nothing else than the value of the Riemann zeta function at the point s_1. What are the algebraic relations between these numbers? these numbers? The product of two multiple zeta values is again a multiple zeta value: this is easily checked by multiplying the two series, and using a "shuffle" product. An example is

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + \zeta(3,2) + \zeta(5),$$

There are other quadratic relations between these numbers, which arise from another expression of $\zeta(\underline{s}) = \zeta(s_1, \ldots, s_k)$ as a (Chen) iterated integral:

$$\zeta(\underline{s}) = \int_{\Delta_p} \omega_{\epsilon_1}(t_1) \cdots \omega_{\epsilon_p}(t_p),$$

with the following notation: $p = s_1 + \cdots + s_k$, the sequence $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ of elements in $\{0,1\}$ is defined by writing the word

$$x_0^{s_1-1}x_1 \cdots x_0^{s_k-1}x_1 = x_{\epsilon_1} \cdots x_{\epsilon_p}$$

on the alphabet $X = \{x_0, x_1\}$, the differential forms ω_ϵ are defined by

$$\omega_0(t) = \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad \omega_1(t) = \frac{dt}{1-t}$$

and Δ_p is the following simplex in $\mathbb{R}^p$:

$$\Delta_p = \{\underline{t} \in \mathbb{R}^p \ ; \ 1 > t_1 > \cdots > t_p > 0\}.$$

Again this yields an expression of the product of two multiple zeta values as a linear combination of multiple zeta values, a simple example being

$$\zeta(2)\zeta(3) = \zeta(2,3) + 3\zeta(3,2) + 6\zeta(4,1).$$

The main conjecture is that these two types of relations are sufficient to describe all algebraic relations between these numbers.

This subject has deep connections with many other mathematical topics: combinatoric (the theory of quasisymmetric functions, Radford's Theorem and Lyndon words), Lie and Hopf algebras, Écalle's theory of resurgent series, Goncharov's work on mixed Tate motives on Spec$\mathbb{Z}$, polylogarithms, monodromy of differential equations, the fundamental group of the projective line minus three points and Belyi's Theorem, the absolute Galois group of $\mathbb{Q}$, the group of Grothendieck-Teichmüller, knots theory and Vassiliev invariants, K-theory, Feynman diagrams and quantum field theory, quasi-triangular quasi-Hopf algebras and Drinfeld's associator Φ_{KZ} (related to the connexion of Knizhnik-Zamolodchikov).

Michel Waldschmidt
Université P. et M. Curie (Paris VI)
Institut de Mathématiques CNRS UMR 7586
Théorie des Nombres Case 247
175, rue du Chevaleret
75013 Paris
France
E-mail : miw@math.jussieu.fr