Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **13** (2001), 287–302

Sur le théorème du produit

par Gaël RÉMOND

Résumé. On donne des versions raffinées effectives du théorème du produit de G. Faltings et de son principal corollaire. Le théorème montre que si l'ensemble des zéros d'indice σ d'un polynôme multihomogène P a une composante commune avec l'ensemble des zéros d'indice $\sigma + \epsilon$ alors cette composante, sous-variété d'un produit d'espaces projectifs, est elle-même un produit à condition que les rapports des degrés de P soient grands en fonction de ϵ. Le corollaire le plus utile implique que, sous une condition plus restrictive, toute composante des zéros d'indice ϵ est contenue dans un produit comme ci-dessus. Dans les deux cas, on sait de plus majorer le degré et la hauteur du produit qui apparaît. J.-H. Evertse et R. Ferretti ont donné des versions effectives de ces résultats. On améliore ces énoncés essentiellement grâce à l'utilisation de la multiplicité de Samuel au lieu de la longueur, en suivant une idée de P. Philippon, qui a donné une version du corollaire. On raffine celle-ci légèrement en travaillant directement avec des degrés et hauteurs multiprojectifs et non en se ramenant au cas projectif. Enfin, pour ce corollaire, on donne deux versions : l'une déduite du théorème par la méthode usuelle, la seconde donnant une condition moins restrictive sur les degrés de P.

Abstract. We present new sharp effective versions of Faltings' product theorem. This result, a generalization of Roth's lemma, shows that if the zeroes of index σ of a multihomogeneous polynomial P have a component Z in common with the zeroes of index $\sigma + \epsilon$ then this Z (subset of a product of projective spaces) is itself a product. Here the index is taken with respect to the degrees δ_i of P as weights and the result holds whenever δ_i/δ_{i+1} is big enough in terms of ϵ. Furthermore, effective versions by Evertse and Ferretti bound the degree and height of Z. If m is the number of factors and c the codimension of Z, our result assumes only $\delta_i/\delta_{i+1} \geq (m/\epsilon)^c$. This is better than the previous bounds by a factor $c!$ and we improve in the same way the estimates for degrees and heights. The key point is the use of Samuel multiplicity introduced in these questions by Philippon, through his zero-estimates. The main corollary of the theorem shows that, in

Manuscrit reçu le 20 juillet 1999.

the above setting, any component of the zeros of index ϵ are contained in a (non-trivial) product under a similar, more restrictive condition on the degrees of P. We deduce first such a corollary, in the usual manner, with the bound $\delta_i/\delta_{i+1} \geq (mn/\epsilon)^n$ (where n is the dimension of the multi-projective space). This condition is the one obtained by Philippon but we get slightly better estimates for degrees and heights (through a direct proof). Last, using a different approach, we prove another corollary with the better bound $\delta_i/\delta_{i+1} \geq (m/\epsilon)^n$; in this case estimates for degrees and heights are less accurate but not significantly in view of certain applications.

Introduction

Le but de ce texte est de donner des versions raffinées du théorème du produit effectif et de son principal corollaire. Ce type d'énoncé, qui s'apparente au lemme de Roth, a été découvert en premier par G. Faltings (voir [Fa]). Le théorème montre que si l'ensemble des zéros d'indice σ d'un polynôme multihomogène P a une composante commune avec l'ensemble des zéros d'indice $\sigma + \varepsilon$ alors cette composante, sous-variété d'un produit d'espaces projectifs, est elle-même un produit à condition que les rapports des degrés de P soient grands en fonction de ε (voir définitions et énoncés précis ci-après). Le corollaire le plus utile implique que, sous une condition plus restrictive, toute composante des zéros d'indice ε est contenue dans un produit comme ci-dessus. Dans les deux cas, on sait de plus majorer le degré et la hauteur du produit qui apparaît.

J.-H. Evertse (voir [E]) et R. Ferretti (voir [Fe]) ont donné des versions effectives de ces résultats. Ensuite, M. Nakamaye (voir [N]) ayant mis en lumière les liens entre théorème du produit et lemmes de zéros, P. Philippon (voir [P3]) a remarqué que non seulement les démonstrations en étaient très semblables mais que le corollaire cité ci-dessus pouvait se déduire du théorème 2 de [P2] et que cela donnait même de meilleures bornes. L'amélioration est due essentiellement à l'utilisation de la multiplicité de Samuel dans [P2] au lieu de la longueur.

Ici, on reprend cette idée pour démontrer directement le théorème du produit. On obtient ainsi des résultats plus précis que ceux de [E] et [Fe]. On améliore également légèrement par rapport à [P2] et [P3] en travaillant directement avec des degrés et hauteurs multiprojectifs (voir [R]) et non en se ramenant au cas projectif (comme [P2, §7]). Enfin, pour le corollaire, on donne deux versions : l'une déduite du théorème par la méthode usuelle, la seconde donnant une condition moins restrictive sur les degrés de P (voir corollaires 1.1 et 1.2).

1. Notations et résultats

Soient K un corps de nombres, $m \geq 2$ et $n = (n_1, \ldots, n_m) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$. On considère l'espace multiprojectif

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_K^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_K^{n_m}.$$

On désigne l'anneau multigradué associé par

$$B = K[X] = K[(X_j^{(i)})_{1 \leq i \leq m,\ 0 \leq j \leq n_i}].$$

Si P est un élément de B et $\kappa \in \mathbb{N}^{n_1+1} \times \cdots \times \mathbb{N}^{n_m+1}$ on note

$$\partial^{(\kappa)} P = \left(\prod_{i=1}^{m} \prod_{j=0}^{n_i} \left(\frac{\partial}{\partial X_j^{(i)}} \right)^{\kappa_{ij}} \right) (P).$$

Lorsque $P \in B$ est multihomogène de multidegré $\delta \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$ et σ est un réel, $Z_\sigma(P)$ sera le fermé de $\mathbb{P}$ défini par l'idéal multihomogène engendré par

$$\left\{ \partial^{(\kappa)} P \,\Big|\, \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=0}^{n_i} \frac{\kappa_{ij}}{\delta_i} \leq \sigma \right\}.$$

On adopte la convention que si a est un multi-indice de $\mathbb{N}^m$ ses composantes sont $a_1, \ldots, a_m$. On emploie aussi les notations usuelles $|a| = a_1 + \cdots + a_m$ et $a! = a_1! \cdots a_m!$; de plus $|\sqrt{a}| = \sqrt{a_1} + \cdots + \sqrt{a_m}$. Si $\Lambda \subset K$ est la famille des coefficients de P, on définit la hauteur du polynôme P (comme celle de Λ) par

$$h(P) = \sum_v \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log \max_{\lambda \in \Lambda} |\lambda|_v$$

(où la somme est prise sur toutes les places v de K et $|\cdot|_v$ désigne la valeur absolue correspondante, normalisée de sorte que $|2|_v = 2$ lorsque v est archimédienne et $|p| = p^{-1}$ lorsque v étend la place p de $\mathbb{Q}$). On utilise enfin la hauteur d'un sous-schéma fermé de $\mathbb{P}_K^{n_i}$ comme définie dans [BGS] ou [P1] : en particulier, la hauteur de $\mathbb{P}_K^{n_i}$ est le nombre de Stoll $h(\mathbb{P}_K^{n_i}) = \sum_{l=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{l} 1/2j$ noté ici s_i. On a alors l'énoncé suivant du théorème du produit.

Théorème 1.1. *Soient K, m, n comme ci-dessus et $\delta \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^m$. Soient $P \in B$ non nul de multidegré δ, $\sigma \geq 0$, $\varepsilon > 0$ et Z une composante irréductible de $Z_\sigma(P)$ et $Z_{\sigma+\varepsilon}(P)$. Si l'on suppose*

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i+1}} \geq \max\left(1, \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^{\operatorname{codim} Z}\right)$$

pour $1 \leq i < m$ alors Z est composante irréductible d'un produit

$$Z_1 \times \cdots \times Z_m$$

où Z_i est un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^{n_i}_K$. De plus si l'on note N le nombre de composantes irréductibles de ce produit $Z_1 \times \cdots \times Z_m$ et

$$\rho(\varepsilon, Z) = \frac{\varepsilon^{-\mathrm{codim} Z}\mathrm{codim} Z!}{\mathrm{codim} Z_1! \cdots \mathrm{codim} Z_m!} \leq \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^{\mathrm{codim} Z}$$

alors $N^{-1}d(Z_1)\cdots d(Z_m) \leq \rho(\varepsilon, Z)$ et, pour tout i tel que $Z_i \neq \mathbb{P}^{n_i}_K$,

$$N^{-1}\left(\prod_{j\neq i} d(Z_j)\right)\delta_i h(Z_i) \leq (\mathrm{codim} Z_i)\rho(\varepsilon, Z)\left(h_0 + \sum_{l=1}^{m}\delta_l s_l\right)$$

où $h_0 = h(P) + |\delta|\log 2 + |\sqrt{n}| + \frac{1}{2}(\mathrm{codim} Z - 1)\log|\delta|$.

On comparera avec [Fa, th. 3.1 et 3.3], [E, th. 1 et 2] et [Fe, th. 7.2]. Quantitativement on a supprimé un facteur $(\mathrm{codim} Z)!$ par rapport à cette dernière référence (dans la condition sur δ et dans ρ). Dans l'estimation des hauteurs, on donne une majoration de chaque $h(Z_i)$ plutôt que d'une combinaison linéaire. On notera aussi que notre hauteur de P diffère de celle employée par [E] et [Fe] qui utilisent une norme quadratique aux places à l'infini. Cependant, si $h_2(P)$ est cette seconde hauteur, on a bien sûr $h(P) \leq h_2(P)$, ce qui rend notre majoration légèrement meilleure (pour la formule de hauteur dans [Fe] voir la remarque avant la démonstration de la proposition 3.2, paragraphe 5 ci-après).

Une autre différence (de présentation) est que les textes cités font apparaître plutôt, sous la forme $[L : K]$ où L est une extension adéquate, le nombre N' de composantes irréductibles de $Z \times \bar{K}$. L'une quelconque d'entr'elles est alors un produit $Z'_1 \times \cdots \times Z'_m$ et le lien avec notre énoncé est donné par $N^{-1}d(Z_1)\cdots d(Z_m) = N'd(Z'_1)\cdots d(Z'_m)$ (car ces deux quantités s'interprètent comme le degré de Z) ; on sait également que Z'_i est une composante irréductible de $Z_i \times \bar{K}$ (voir aussi la fin du paragraphe 3).

De manière classique, on déduit du théorème un premier corollaire.

Corollaire 1.1. *Soient K, m, n et δ comme ci-dessus puis $\varepsilon > 0$. On suppose*

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i+1}} \geq \max\left(1, \left(\frac{m|n|}{\varepsilon}\right)^{|n|}\right)$$

pour $1 \leq i < m$. Alors pour tout $P \in B$ de multidegré δ et toute composante irréductible W de $Z_\varepsilon(P)$ il existe un produit Z de la forme

$$W \subset Z = Z_1 \times \cdots \times Z_m \subsetneq \mathbb{P}$$

où Z_i est un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}^{n_i}_K$. De plus, si N est le nombre de composantes irréductibles de Z, on a les inégalités

$$N^{-1}d(Z_1)\cdots d(Z_m) \leq \rho\left(\frac{\varepsilon}{|n|}, Z\right) \leq \left(\frac{m|n|}{\varepsilon}\right)^{\mathrm{codim} Z}$$

et, pour tout i tel que $Z_i \neq \mathbb{P}_K^{n_i}$,

$$N^{-1}\left(\prod_{j\neq i} d(Z_j)\right)\delta_i h(Z_i) \leq (\mathrm{codim} Z_i)\rho\left(\frac{\varepsilon}{|n|}, Z\right)\left(h_0 + \sum_{l=1}^{m}\delta_l s_l\right)$$

où $h_0 = h(P) + |\delta|\log 2 + |\sqrt{n}| + \frac{1}{2}(\mathrm{codim} Z - 1)\log|\delta|$.

On comparera avec [E, corollaire] qui donne $\frac{\delta_i}{\delta_{i+1}} \geq \left(\frac{m|n|(|n|+1)}{\varepsilon}\right)^{|n|}$ et [P3, th. 2] qui a la même condition qu'ici pour δ mais $(|n|^2/\varepsilon)^{\mathrm{codim} Z}$ au lieu de $\rho(\varepsilon/|n|, Z)$. Cette amélioration est due à l'usage des degrés (et hauteurs) multiprojectives de manière séparée par opposition à leur combinaison linéaire qu'est le polynôme de Hilbert.

Voici maintenant un second corollaire où la condition pour δ est encore moins restrictive.

Corollaire 1.2. *Soient K, m, n et δ comme précédemment puis $0 < \varepsilon < m(\log(|n|+1)/2|n|^2)^{|n|}$. On suppose*

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i+1}} \geq \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^{|n|}$$

pour $1 \leq i < m$. Alors pour tout $P \in B$ de multidegré δ et toute composante irréductible W de $Z_\varepsilon(P)$ il existe un produit Z de la forme

$$W \subset Z = Z_1 \times \cdots \times Z_m \subsetneq \mathbb{P}$$

où Z_i est un sous-schéma fermé intègre de $\mathbb{P}_K^{n_i}$. De plus, si N est le nombre de composantes irréductibles de Z, on a les inégalités

$$N^{-1} d(Z_1)\cdots d(Z_m) \leq \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^{|n|}$$

et, pour tout i tel que $Z_i \neq \mathbb{P}_K^{n_i}$,

$$N^{-1}\left(\prod_{j\neq i} d(Z_j)\right)\delta_i h(Z_i) \leq (\mathrm{codim} Z_i)\left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^{|n|}\left(h_0 + \sum_{l=1}^{m}\delta_l s_l\right)$$

où $h_0 = h(P) + |\delta|\log 2 + |\sqrt{n}| + \frac{1}{2}(\mathrm{codim} Z - 1)\log|\delta|$.

Dans cette version, les majorations de degré et hauteur sont éventuellement moins bonnes lorsque codim$Z$ est petit. Ainsi, selon les applications, s'il est crucial de garder codim$Z$ dans les estimations, le corollaire précédent peut être plus utile ; si, en revanche, c'est la condition sur δ qui importe le plus ou si on ne peut que majorer codim$Z$ par $|n|$, on emploiera ce second énoncé.

2. Déduction des corollaires

On introduit une fonction de $k \in \mathbb{N}$ ($m \geq 2$ est fixé comme ci-dessus)

$$\psi(k) = \max_{a_0+\cdots+a_m=k} \left(\frac{k!}{a_0! \cdots a_m!} \right).$$

On constate bien sûr

$$\psi(k) \leq \sum_{a_0+\cdots+a_m=k} \left(\frac{k!}{a_0! \cdots a_m!} \right) = m^k$$

(l'inégalité est stricte si $k \neq 0$). Mais on vérifie que l'on a en fait $\psi(k) \leq m^k/\sqrt{k+1}$ (pour ce faire on montre que si $a \in \mathbb{N}$ et $0 \leq l < m$ on a $\psi(am+l) = (am+l)!a!^{-m}(a+1)^{-l}$; on établit ensuite la majoration par récurrence sur a si $l = 0$ puis par récurrence sur l si a est fixé).

On a alors un énoncé légèrement plus fin que le théorème.

Proposition 2.1. *L'énoncé du théorème 1.1 reste vrai si l'on remplace la condition sur δ par*

$$\frac{\delta_i}{\delta_{i+1}} \geq 1 \qquad et \qquad \frac{\delta_i}{\delta_{i+1}} > \frac{\psi(\mathrm{codim} Z)}{\varepsilon^{\mathrm{codim} Z}}$$

pour $1 \leq i < m$.

Bien entendu on se contentera d'établir cette proposition qui entraîne le théorème. C'est l'objet des parties suivantes mais on peut d'ores et déjà donner la

Démonstration des corollaires. Dans les deux cas on choisit une certaine suite de réels

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_{|n|} = \varepsilon$$

de sorte que

$$Z_\varepsilon = Z_{\sigma_{|n|}} \subset \cdots \subset Z_{\sigma_1} \subset Z_{\sigma_0} = V(P).$$

On fixe ensuite des composantes irréductibles W_i de Z_{σ_i} de façon à ce que

$$W = W_{|n|} \subset \cdots \subset W_1 \subset W_0 \subsetneq \mathbb{P}.$$

Si les inclusions sont strictes jusqu'à W_k on a $\mathrm{codim} W_k \leq k$. Comme $\mathrm{codim} W_0 = 1$, il existe $k \geq 1$ avec $\mathrm{codim} W_k \leq k$ et $W_k = W_{k-1}$. On peut donc appliquer la proposition 2.1 avec $W_k, \sigma_{k-1}, \sigma_k - \sigma_{k-1}$ remplaçant Z, σ, ε.

Pour le corollaire 1.1, on pose $\sigma_k = k\varepsilon/|n|$ et l'énoncé découle du théorème. Le corollaire 1.2 découlera de la proposition si l'on montre que l'on peut choisir les σ_k de sorte que

$$\frac{\psi(\mathrm{codim} W_k)}{(\sigma_k - \sigma_{k-1})^{\mathrm{codim} W_k}} \leq \frac{\psi(k)}{(\sigma_k - \sigma_{k-1})^k} \leq \left(\frac{m}{\varepsilon}\right)^{|n|}.$$

On veut donc $\sigma_k - \sigma_{k-1} > (\varepsilon/m)^{|n|/k}\psi(k)^{1/k}$ pour tout $1 \leq k \leq |n|$. Un tel choix est possible si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{|n|} \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^{\frac{|n|}{k}} \psi(k)^{\frac{1}{k}} < \varepsilon.$$

On majore $\psi(|n|)$ par $m^{|n|}/\sqrt{|n|+1}$ et $\psi(k) < m^k$ si $k < |n|$. Le membre de gauche de l'inégalité précédente est donc majoré par ε fois

$$(|n|+1)^{-\frac{1}{2|n|}} + \sum_{k=1}^{|n|-1} \left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^{\frac{|n|}{k}-1} \leq (|n|+1)^{-\frac{1}{2|n|}} + (|n|-1)\left(\frac{\varepsilon}{m}\right)^{\frac{1}{|n|-1}}.$$

Il reste à constater que

$$1 + (|n|-1)(|n|+1)^{\frac{1}{2|n|}} \left(\frac{\log(|n|+1)}{2|n|^2}\right)^{\frac{|n|}{|n|-1}} \leq (|n|+1)^{\frac{1}{2|n|}}$$

comme on le voit en majorant le facteur $(|n|-1)(|n|+1)^{\frac{1}{2|n|}}$ par $|n|^{1+\frac{1}{|n|}} \leq |n|^{\frac{|n|}{|n|-1}}$ puis $\log(|n|+1)/2|n|$ par $(|n|+1)^{\frac{1}{2|n|}} - 1$. □

3. Résultats auxiliaires

Dans ce paragraphe, nous donnons les énoncés intermédiaires sur lesquels repose la démonstration et nous montrons comment le théorème du produit s'en déduit. Pour les deux premiers résultats on utilise (comme [P2]) la notion de multiplicité, notée $e_J(M)$, définie dans [Bk, §7]. On y note $\mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ la hauteur (algébrique) d'un idéal premier $\mathfrak{p}$, c'est-à-dire la longueur d'une chaîne maximale d'idéaux premiers contenus dans $\mathfrak{p}$.

Proposition 3.1. *Soient I un idéal multihomogène de B, $\mathfrak{p}$ un premier minimal contenant I et $\varepsilon > 0$. On suppose que pour $P \in I$ et $\kappa \in \mathbb{N}^{n_1+1} \times \cdots \times \mathbb{N}^{n_m+1}$*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n_i} \frac{\kappa_{ij}}{\delta_i} \leq \varepsilon \Longrightarrow \partial^{(\kappa)}P \in \mathfrak{p}.$$

Alors

$$e_{IB_{\mathfrak{p}}}(B_{\mathfrak{p}}) \geq \varepsilon^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})} \prod_{i=1}^{m} \delta_i^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i)-\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1})}$$

où $\mathfrak{p}_i$ est la trace de $\mathfrak{p}$ dans $B_i = K[(X_j^{(l)})_{i\leq l\leq m, 0\leq j\leq n_l}]$.

Cette proposition s'inspire de [P2, lemme 7] et est à rapprocher de [E, lemme 10] (où la longueur est utilisée). Toutefois contrairement à ces références on ne suppose pas que K est algébriquement clos.

On a ensuite un lemme d'algèbre commutative.

Lemme 3.1. *Soient A un anneau nœthérien, I un idéal de A, $\mathfrak{p}$ un premier de A contenant I et $d = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$. Si $x_1, \ldots, x_d$ sont des éléments de I on a*

$$e_{IA_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}) \leq \operatorname{long}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}}/(x_1, \ldots, x_d)A_{\mathfrak{p}}).$$

Pour le résultat ci-après, on note ε_k le k-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{Z}^m$. On dit qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ de B est pertinent si pour tout k il existe un monôme de degré ε_k dans $B \setminus \mathfrak{p}$. La hauteur d'une famille finie de polynômes désigne celle de la famille de tous leurs coefficients. Enfin on utilise les hauteurs et degrés multiprojectifs d'un idéal comme définis dans [R, chap. 7] (on distinguera la hauteur algébrique $\mathrm{ht}(\cdot)$ des hauteurs arithmétiques $h_\alpha(\cdot)$).

Proposition 3.2. *Soit I un idéal multihomogène de B engendré par une famille finie $\mathcal{R}$ formée d'éléments de multidegré au plus δ. Si $\mathfrak{p}$ est un premier minimal pertinent contenant I et $d = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$, il existe $P_1, \ldots, P_d \in I$ de sorte que si $\alpha \in \mathbb{N}^m$, $|\alpha| = d$*

$$\operatorname{long}_{B_{\mathfrak{p}}}(B_{\mathfrak{p}}/(P_1, \ldots, P_d)B_{\mathfrak{p}}) \deg_{n-\alpha} \mathfrak{p} \leq \frac{d!}{\alpha!} \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_m^{\alpha_m}$$

tandis que si $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{-1\})^m$ et $|\alpha| = d - 1$ alors

$$\operatorname{long}_{B_{\mathfrak{p}}}(B_{\mathfrak{p}}/(P_1, \ldots, P_d)B_{\mathfrak{p}}) h_{n-\alpha}(\mathfrak{p}) \leq \frac{d!}{\alpha!} \delta^\alpha h_0 + \sum_{l=1}^{m} s_l \frac{d!}{(\alpha + \varepsilon_l)!} \delta^{\alpha + \varepsilon_l}$$

avec $h_0 = h(\mathcal{R}) + \frac{1}{2} \log |\delta|^{d-1} + |\sqrt{n}|$ et la convention que $1/(-1)! = 0$.

Voici maintenant comment ces résultats se combinent en la
Démonstration de la proposition 2.1. On note I_σ l'idéal de B engendré par les $\partial^{(\kappa)} P$ pour $\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i} \frac{\kappa_{ij}}{\delta_i} \leq \sigma$ et de même $I_{\sigma+\varepsilon}$. Si $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier multihomogène associé à Z, l'hypothèse entraîne que $\mathfrak{p}$ est un premier minimal aussi bien de I_σ que de $I_{\sigma+\varepsilon}$. Si maintenant κ vérifie $\sum_{i=1}^m \sum_{j=0}^{n_i} \frac{\kappa_{ij}}{\delta_i} \leq \varepsilon$ on a clairement $\partial^{(\kappa)}(I_\sigma) \subset I_{\sigma+\varepsilon} \subset \mathfrak{p}$. Par suite les hypothèses de la proposition 3.1 sont satisfaites (avec $I = I_\sigma$). Par ailleurs, I_σ est engendré par la famille $\mathcal{R}$ des polynômes multihomogènes $\frac{1}{\kappa!} \partial^{(\kappa)} P$ qui sont de multidegrés au plus $\deg P = \delta$ et $h(\mathcal{R}) \leq h(P) + |\delta| \log 2$. On emboîte alors nos résultats auxiliaires pour trouver

$$\varepsilon^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})} \prod_{i=1}^{m} \delta_i^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1})} \deg_{n-\alpha} \mathfrak{p} \leq \frac{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})!}{\alpha!} \delta_1^{\alpha_1} \cdots \delta_m^{\alpha_m}$$

si $|\alpha| = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$ et

$$\varepsilon^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})} \prod_{i=1}^{m} \delta_i^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1})} h_{n-\alpha'} \mathfrak{p} \leq \frac{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})!}{\alpha'!} \delta^{\alpha'} h_0 + \sum_{l=1}^{m} s_l \frac{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})!}{(\alpha' + \varepsilon_l)!} \delta^{\alpha' + \varepsilon_l}$$

si $|\alpha'| = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}) - 1$ avec $h_0 = h(P) + |\delta| \log 2 + |\sqrt{n}| + \frac{1}{2}(\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) - 1) \log |\delta|$. Si l'on pose $\mathfrak{p}'_i = \mathfrak{p} \cap K[(X_j^{(l)})_{1 \le l < i, 0 \le j \le n_l}]$ puis $\alpha_i = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_{i+1}) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_i)$ alors $\deg_{n-\alpha} \mathfrak{p} \neq 0$: cela résulte de l'assertion 3 du théorème 2.2 de [R, chap. 5] sur le polynôme de Hilbert-Samuel (généralisée à un nombre quelconque de parties et appliquée avec $\{1\} \subset \{1, 2\} \subset \cdots \subset \{1, \ldots, m\}$). Par suite

$$\varepsilon^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})} \prod_{i=1}^{m} \delta_i^{(\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1})) - (\mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_{i+1}) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_i))} \le \frac{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})!}{\alpha!} \le \psi(\mathrm{ht}(\mathfrak{p}))$$

ce qui se réécrit

$$\prod_{i=1}^{m-1} \left(\frac{\delta_i}{\delta_{i+1}} \right)^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1}) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_{i+1})} \le \frac{\psi(\mathrm{ht}(\mathfrak{p}))}{\varepsilon^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})}}.$$

Comme $\mathfrak{p} \supset (\mathfrak{p}_{i+1}, \mathfrak{p}'_{i+1})$ on a $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) \ge \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1}) + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_{i+1})$. Si l'une de ces inégalités (disons pour $i = i_0$) est stricte le membre de droite est minoré par

$$\frac{\delta_{i_0}}{\delta_{i_0+1}} > \frac{\psi(\mathrm{codim} Z)}{\varepsilon^{\mathrm{codim}(Z)}} = \frac{\psi(\mathrm{ht}(\mathfrak{p}))}{\varepsilon^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p})}}$$

ce qui est absurde. Ainsi on a $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) + \mathrm{ht}(\mathfrak{p}'_i)$ pour $2 \le i \le m$ donc $\mathfrak{p}$ est un premier minimal de $(\mathfrak{p}_i, \mathfrak{p}'_i)$. Ceci entraîne que $\mathfrak{p}$ est un premier minimal de l'idéal engendré par les idéaux $\mathfrak{p} \cap K[(X_j^{(i)})_{0 \le j \le n_i}]$ $(1 \le i \le m)$ et donc que Z est composante irréductible du produit des sous-schémas fermés intègres Z_i qu'ils définissent. Par suite l'élément α considéré est donné par $\alpha_i = n_i - \dim Z_i$ et l'on a $\deg_{n-\alpha} \mathfrak{p} = N^{-1} \deg_{n-\alpha}(Z_1 \times \cdots \times Z_m) = N^{-1} d(Z_1) \cdots d(Z_m)$. Ainsi on trouve bien

$$\varepsilon^{\mathrm{codim} Z} N^{-1} d(Z_1) \cdots d(Z_m) \le \frac{\mathrm{codim} Z!}{\mathrm{codim} Z_1! \cdots \mathrm{codim} Z_m!}.$$

Si maintenant $\alpha' = \alpha - \varepsilon_k$ on a (voir corollaire 2.1 de [R, chap. 7])

$$h_{n-\alpha'}(\mathfrak{p}) = N^{-1} h_{n-\alpha'}(Z_1 \times \cdots \times Z_m) = N^{-1} d(Z_1) \cdots d(Z_m) \frac{h(Z_k)}{d(Z_k)}.$$

En reportant dans la majoration donnée plus haut on peut simplifier par $\delta^{\alpha'}$ pour obtenir (si $\mathrm{codim} Z_k \neq 0$)

$$\varepsilon^{\mathrm{codim} Z} N^{-1} d(Z_1) \cdots d(Z_m) \frac{\delta_k h(Z_k)}{d(Z_k)} \le \frac{\mathrm{codim} Z!}{\alpha'!} \left(h_0 + \sum_{l=1}^{m} \frac{\delta_l s_l}{\alpha'_l + 1} \right).$$

La conclusion s'en déduit en minorant $\alpha'_l \ge 0$. □

On a utilisé le fait que toutes les composantes irréductibles de $Z_1 \times \cdots \times Z_m$ ont mêmes degrés et hauteurs. En effet, pour une clôture algébrique $\bar{K}$, chaque $Z_i \times \bar{K}$ a des composantes irréductibles conjuguées sous $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ (donc de mêmes degré et hauteur) ; cela donne l'assertion pour les composantes de $(Z_1 \times \cdots \times Z_m) \times \bar{K}$. Celles de $Z_1 \times \cdots \times Z_m$ s'en déduisent en regroupant les différentes orbites sous l'action de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$ qui ont toutes même cardinal.

Comme le cardinal d'une telle orbite est au moins égal au nombre de composantes irréductibles de $Z_i \times \bar{K}$, ceci prouve que pour tout i on a $d(Z_i) \leq N^{-1}d(Z_1)\cdots d(Z_m)$. Par conséquent, la proposition (et donc le théorème et les corollaires) donne des majorations de $d(Z_i)$ et $\delta_i h(Z_i)$.

4. Multiplicités

Dans [P2] le lemme 7 est établi en recourant à des localisés en les idéaux maximaux contenant $\mathfrak{p}$ dont les corps résiduels sont tous isomorphes à K car celui-ci est supposé algébriquement clos. Nous suivons une méthode voisine mais travaillons seulement dans le localisé $B_{\mathfrak{p}}$ et ses analogues $(B_i)_{\mathfrak{p}_i}$.

Démonstration de la proposition 3.1. On note $A_i = (B_i)_{\mathfrak{p}_i}$, $\mathfrak{q}_i = \mathfrak{p}_i A_i$ et $k_i = A_i/\mathfrak{q}_i$. On a un diagramme exact d'espaces vectoriels sur k_i (qui définit M_i)

$$\begin{array}{ccccccc}
(\mathfrak{q}_{i+1}/\mathfrak{q}_{i+1}^2) \underset{k_{i+1}}{\otimes} k_i & \longrightarrow & \Omega_{A_{i+1}/K} \underset{A_{i+1}}{\otimes} k_i & \longrightarrow & \Omega_{k_{i+1}/K} \underset{k_{i+1}}{\otimes} k_i & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathfrak{q}_i/\mathfrak{q}_i^2 & \longrightarrow & \Omega_{A_i/K} \underset{A_i}{\otimes} k_i & \longrightarrow & \Omega_{k_i/K} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
M_i & \longrightarrow & \Omega_{A_i/A_{i+1}} \underset{A_i}{\otimes} k_i & \longrightarrow & \Omega_{k_i/k_{i+1}} & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Cela est conséquence immédiate des suites exactes pour les modules de différentielles (voir par exemple [H, II.8]). Les dimensions des espaces vectoriels qui apparaissent sont dans l'ordre $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1})$, $\dim B_{i+1}$, $\mathrm{degtr}(k_{i+1}/K)$, $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i)$, $\dim B_i$, $\mathrm{degtr}(k_i/K)$, $\dim M_i$, $\dim B_i - \dim B_{i+1}$ et $\mathrm{degtr}(k_i/k_{i+1})$. Cela résulte du fait que A_i et A_{i+1} sont des anneaux locaux réguliers, que B_i et B_{i+1} sont des algèbres de polynômes et $K \subset k_{i+1} \subset k_i$ des extensions de type fini de corps de caractéristique 0. Par suite, on peut rajouter les six zéros qui manquent dans le diagramme et l'on obtient

$$\dim M_i = \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1}).$$

Par ailleurs $\Omega_{A_i/A_{i+1}} \underset{A_i}{\otimes} k_i$ s'écrit $\bigoplus_{j=0}^{n_i} k_i dX_j^{(i)}$. On peut donc choisir des éléments $y_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1})+1}, \dots, y_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i)}$ de M_i et des dérivations $\partial_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1})+1}, \dots, \partial_{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i)}$ de la forme $\partial/\partial X_j^{(i)}$ de sorte que $\partial_\alpha y_\beta = \delta_{\alpha,\beta}$ si $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1}) < \alpha, \beta \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i)$. En faisant ceci pour tout i, en relevant y_α dans $\mathfrak{q}_i$ puis, à un inversible de A_i près, en un élément $Q_\alpha \in \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$, on obtient finalement (si

$d = \mathrm{ht}(\mathfrak{p})$)

$$Q_1, \dots, Q_d \in \mathfrak{p} \qquad \text{et} \qquad \partial_1, \dots, \partial_d$$

avec

$$\partial_\alpha Q_\beta \notin \mathfrak{p} \iff \alpha = \beta$$

où $\partial_\alpha = \partial/\partial X_{j_\alpha}^{(i_\alpha)}$, i_α étant l'unique entier tel que $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i_\alpha+1}) < \alpha \leq \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i_\alpha})$ et $0 \leq j_\alpha \leq n_{i_\alpha}$. En particulier les Q_α forment une base de $\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^2 B_\mathfrak{p}$ et on a donc un isomorphisme

$$\hat{B}_\mathfrak{p} \simeq k_1[[Q_1, \dots, Q_d]].$$

Si $P \in B$ et $\gamma \in \mathbb{N}^d$, l'image dans k_1 de $(\partial_1^{\gamma_1} \cdots \partial_d^{\gamma_d})(P)$ est le produit de $c_\gamma \in k_1^\times$ par le coefficient de $Q_1^{\gamma_1} \cdots Q_d^{\gamma_d}$ de l'image de P par l'isomorphisme ci-dessus. L'hypothèse de l'énoncé implique alors que $I\hat{B}_\mathfrak{p}$ est contenu dans l'idéal J de $\hat{B}_\mathfrak{p}$ engendré par les monômes

$$Q_1^{\gamma_1} \cdots Q_d^{\gamma_d} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\gamma_\alpha}{\delta_{i_\alpha}} > \varepsilon.$$

Si l'on note $\mathrm{Conv}(E)$ l'enveloppe convexe d'un ensemble E, il résulte de l'exercice 2 page 103 de [Bk, §7] que

$$e_J(\hat{B}_\mathfrak{p}) = d!\mathrm{Vol}\left(\mathbb{R}_+^d \setminus \mathrm{Conv}\left\{\gamma \in \mathbb{N}^d \,\middle|\, \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{\gamma_\alpha}{\delta_{i_\alpha}} > \varepsilon\right\}\right).$$

Or l'ensemble dont le volume apparaît contient

$$\left\{x \in \mathbb{R}_+^d \,\middle|\, \sum_{\alpha=1}^{d} \frac{x_\alpha}{\delta_{i_\alpha}} \leq \varepsilon\right\}$$

dont le volume est

$$\frac{1}{d!} \prod_{\alpha=1}^{d} (\varepsilon \delta_{i_\alpha}).$$

Par le corollaire du n°2 et la remarque 1 du n°1 de [Bk, §7] et par définition des i_α on a

$$e_{IB_\mathfrak{p}}(B_\mathfrak{p}) = e_{I\hat{B}_\mathfrak{p}}(\hat{B}_\mathfrak{p}) \geq e_J(\hat{B}_\mathfrak{p}) \geq \prod_{\alpha=1}^{d} (\varepsilon \delta_{i_\alpha}) = \varepsilon^d \prod_{i=1}^{m} \delta_i^{\mathrm{ht}(\mathfrak{p}_i) - \mathrm{ht}(\mathfrak{p}_{i+1})}.$$

□

Le lemme 3.1 permet de revenir à un calcul de longueur, adapté aux questions de degrés et hauteurs, mais évite le recours aux éléments superficiels de [P2, lemme 5].

Démonstration du lemme 3.1. On note $J = (x_1, \dots, x_d)$. Si $A_\mathfrak{p}/JA_\mathfrak{p}$ n'est pas de longueur finie, il n'y a rien à faire. Dans le cas contraire, $A_\mathfrak{p}/IA_\mathfrak{p}$ est également de longueur finie et l'on a

$$e_{IA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) \leq e_{JA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p})$$

car $J \subset I$ (remarque 1 de [Bk, §7, n°1]). Puisque $A_\mathfrak{p}/JA_\mathfrak{p}$ est de longueur finie, sa dimension comme $A_\mathfrak{p}$-module est nulle ; on peut donc écrire $\dim_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/JA_\mathfrak{p}) = \dim_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) - d$ et le théorème 1, b) de [Bk, §7, n°5] donne

$$e_{JA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) \leq e_{JA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/JA_\mathfrak{p}).$$

Enfin on a

$$e_{JA_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/JA_\mathfrak{p}) = \operatorname{long}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}/JA_\mathfrak{p})$$

par la remarque 2 de [Bk, §7, n°1], ce qui conclut la démonstration. □

5. Interpolation

Au cours de la démonstration de la proposition 3.2 on utilise l'estimation élémentaire suivante.

Lemme 5.1. *Soient K un corps de caractéristique nulle, des entiers $n, s \in \mathbb{N}$ et $V_1, \dots, V_s$ des sous-espaces affines stricts de K^n. Il existe $x \in \mathbb{N}^n \subset K^n$ tel que*

$$x \notin \bigcup_{t=1}^{s} V_t \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \leq s.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 0$ il n'y a rien à faire (on a $s = 0$). Supposons désormais $n \geq 1$ et notons $e_1, \dots, e_n$ la base canonique de K^n. On désigne ensuite par $x_n \in \mathbb{N}$ le plus petit entier tel que $x_n e_n + e_n^\perp$ n'est pas l'un des V_t. Par suite $V_t \cap (x_n e_n + e_n^\perp)$ est un sous-espace strict de $x_n e_n + e_n^\perp$ pour tout t et il y a au plus $s - x_n$ tels indices pour lesquels cet espace est non vide. On identifie $e_n^\perp$ à K^{n-1} et par l'hypothèse de récurrence il existe $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{N}^{n-1}$ avec $\sum_{i=1}^{n-1} x_i \leq s - x_n$ et $x_n e_n + (x_1, \dots, x_{n-1}) \notin \bigcup_{1 \leq t \leq s} V_t \cap (x_n e_n + e_n^\perp)$, ce qui conclut. □

L'obtention de $P_1, \dots, P_d$ avec la condition sur le degré est classique (voir la fin du lemme 5 de [P2] ; notre démonstration s'inspire aussi de [Br]). Pour les hauteurs, la remarque de [P2, §2] évoque un tel résultat sans donner de détails. Notre énoncé est semblable à [Fe, prop. 6.3] dont la démonstration semble incomplète (avec les notations attenantes, le résultat n'est pas valable lorsque $\mathbf{N} - \mathbf{A} \notin \mathbb{N}^m$ (tout k) et, à cause du procédé de récurrence, on n'obtient pas la formule annoncée, même pour les autres indices, si $k \geq 2$). Ici, nous nous appuyons sur la formule d'intersection de [R, chap. 7] (qui est légèrement plus fine que [Fe, prop. 6.2]).

Démonstration de la proposition 3.2. On remarque que

$$\operatorname{long}_{B_{\mathfrak{p}}}(B_{\mathfrak{p}}/(P_1,\dots,P_d)B_{\mathfrak{p}})\deg_\alpha \mathfrak{p} = \deg_\alpha((P_1,\dots,P_d)B_{\mathfrak{p}}\cap B)$$

(lorsque le membre de gauche est fini) et de même pour la hauteur. Par conséquent il va nous suffire de construire les $P_1,\dots,P_d$ par récurrence de sorte que $J_i = (P_1,\dots,P_i)B_{\mathfrak{p}}\cap B$ soit pur de hauteur i et vérifie

$$\deg(J_i) \le \delta^{*i} \qquad \text{et} \qquad h_{n-\alpha}(J_i) \le \frac{i!}{\alpha!}\delta^\alpha h_{(i)} + \sum_{l=1}^m s_l \frac{i!}{(\alpha+\varepsilon_l)!}\delta^{\alpha+\varepsilon_l}$$

(pour $|\alpha| = i-1$) avec $h_{(i)} = h(\mathcal{R}) + \frac{1}{2}(i-1)\log|\delta| + |\sqrt{n}|$. L'opérateur $*$ utilisé ici est, comme dans [R, chap. 5], l'application $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}^m}\times\mathbb{Q}^m \to \mathbb{Q}^{\mathbb{N}^m}$ définie par $(\delta * k)_\alpha = \sum_{l=1}^m k_l\delta_{\alpha+\varepsilon_l}$ pour $\alpha\in\mathbb{N}^m$. Si $i=0$ on a $J_0 = 0$ et les assertions sont vérifiées en vertu des formules pour la hauteur de $\mathbb{P}$ (voir [R, chap. 7]). Supposons $0\le i<d$ et J_i construit avec ces propriétés. On note $\operatorname{Ass}(J_i) = \{\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_s\}$. Par définition de J_i on a $\mathfrak{q}_t\subset\mathfrak{p}$; par pureté, $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}_t) = i < d = \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$ donc $\mathfrak{q}_t\ne\mathfrak{p}$. Par suite on ne peut avoir $I\subset\mathfrak{q}_t\subset\mathfrak{p}$ par minimalité de $\mathfrak{p}$. Pour chaque $R\in\mathcal{R}$ on choisit un monôme $\mathfrak{m}_R$ de degré $\delta-\deg R$ n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$. Ainsi le K-espace vectoriel engendré par les $\mathfrak{m}_R R$ n'est inclus dans aucun $\mathfrak{q}_t$. Par le lemme précédent il existe $a\in\mathbb{N}^{\mathcal{R}}$ de sorte que

$$P_{i+1} = \sum_{R\in\mathcal{R}} a_R\mathfrak{m}_R R \notin \bigcup_{t=1}^s \mathfrak{q}_t \qquad \text{et} \qquad \sum_{R\in\mathcal{R}} a_R \le s.$$

Le polynôme P_{i+1} ainsi défini est de multidegré δ. Comme il n'est pas diviseur de zéro dans B/J_i, l'idéal $(J_i,P_{i+1})\subset\mathfrak{p}$ est de hauteur $i+1$ et il en va donc de même de $J_{i+1} = (J_i,P_{i+1})B_{\mathfrak{p}}\cap B$. Puisque ce dernier s'écrit $J_{i+1} = (P_1,\dots,P_{i+1})B_{\mathfrak{p}}\cap B$ il est pur. Il reste à montrer les majorations de degré et hauteur pour J_{i+1}. Par ce qui précède, on a, pour tout premier $\mathfrak{r}$ minimal contenant (J_i,P_{i+1}), la formule

$$\operatorname{long}_{B_{\mathfrak{r}}}(B_{\mathfrak{r}}/(J_i,P_{i+1})B_{\mathfrak{r}}) = \sum_{\mathfrak{q}_t\subset\mathfrak{r}} \operatorname{long}_{B_{\mathfrak{q}_t}}(B_{\mathfrak{q}_t}/J_iB_{\mathfrak{q}_t})\operatorname{long}_{B_{\mathfrak{r}}}(B_{\mathfrak{r}}/(\mathfrak{q}_t,P_{i+1})B_{\mathfrak{r}}).$$

Ceci permet d'écrire

$$\deg(J_{i+1}) \le \deg(J_i,P_{i+1}) = \sum_{t=1}^s \operatorname{long}_{B_{\mathfrak{q}_t}}(B_{\mathfrak{q}_t}/J_iB_{\mathfrak{q}_t})\deg(\mathfrak{q}_t,P_{i+1})$$

et la même formule où deg est remplacé par $h_{n-\alpha}$ (pour $|\alpha| = i$). En vertu du théorème d'intersection 3.1 de [R, chap. 7] on a $\deg(\mathfrak{q}_t,P_{i+1}) = \deg(\mathfrak{q}_t)*\delta$ et (avec le corollaire 3.1 de cette référence)

$$h_{n-\alpha}(\mathfrak{q}_t,P_{i+1}) \le d_{n-\alpha}(\mathfrak{q}_t)h_m(P_{i+1}) + \sum_{k=1}^m \delta_k h_{n-\alpha+\varepsilon_k}(\mathfrak{q}_t).$$

On en déduit d'abord pour les degrés

$$\deg(J_{i+1}) \leq \deg(J_i) * \delta = \delta^{*(i+1)}$$

qui est la majoration désirée ; pour les hauteurs, on a

$$\begin{aligned} h_{n-\alpha}(J_{i+1}) &\leq h_m(P_{i+1}) d_{n-\alpha}(J_i) + \sum_{k=1}^{m} \delta_k h_{n-\alpha+\varepsilon_k}(J_i) \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \delta_k \left(\sum_{l=1}^{m} s_l \frac{i!}{(\alpha - \varepsilon_k + \varepsilon_l)!} \delta^{\alpha - \varepsilon_k + \varepsilon_l} + h_{(i)} \frac{i!}{(\alpha - \varepsilon_k)!} \delta^{\alpha - \varepsilon_k} \right) \\ &\quad + h_m(P_{i+1}) \frac{i!}{\alpha!} \delta^{\alpha} \end{aligned}$$

(où la majoration du degré est valable même si $\alpha \notin \mathbb{N}^m$ grâce à notre convention pour $(-1)!$). En vertu de

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{i!}{(\alpha - \varepsilon_k)!} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \frac{i!}{\alpha!} = i \frac{i!}{\alpha!}$$

et du résultat semblable avec $\alpha + \varepsilon_l$ on trouve

$$h_{n-\alpha}(J_{i+1}) \leq \frac{i!}{\alpha!} \delta^{\alpha} (i h_{(i)} + h_m(P_{i+1})) + \sum_{l=1}^{m} s_l \frac{(i+1)!}{(\alpha + \varepsilon_l)!} \delta^{\alpha + \varepsilon_l}.$$

Pour conclure il reste à majorer $h_m(P_{i+1})$. Par définition de h_m on a

$$h_m(P_{i+1}) = h_m \left(\sum_{R \in \mathcal{R}} a_R \mathfrak{m}_R R \right) \leq h(\mathcal{R}) + \log s + \log \sqrt{\sum_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_\delta} \binom{\delta}{\mathfrak{m}}^{-1}}$$

où $\mathcal{M}_\delta$ désigne l'ensemble des monômes de degré δ (voir [R, chap. 7]). On peut majorer $\sum_{\mathfrak{m} \in \mathcal{M}_\delta} \binom{\delta}{\mathfrak{m}}^{-1} \leq e^{2|\sqrt{n}|}$ (voir le lemme ci-après). Ensuite $s \leq \sum_{|\alpha|=i} \deg_{n-\alpha}(J_i)$ car pour chaque t il existe α avec $\deg_{n-\alpha}(\mathfrak{q}_t) \neq 0$ (et l'on utilise encore la formule des longueurs). Donc

$$s \leq \sum_{|\alpha|=i} \frac{i!}{\alpha!} \delta^{\alpha} = |\delta|^i$$

ce qui montre $h_m(P_{i+1}) \leq h(\mathcal{R}) + i \log|\delta| + |\sqrt{n}|$ puis $i h_{(i)} + h_m(P_{i+1}) \leq (i+1) h_{(i+1)}$ ce qui permet de conclure. □

Ci-dessus on a fait usage de l'inégalité suivante.

Lemme 5.2. *Si $d, n \in \mathbb{N}$ on a*

$$\sum_{a_0 + \cdots + a_n = d} \frac{a_0! \cdots a_n!}{d!} \leq e^{2\sqrt{n}}$$

où la somme est prise sur les $a \in \mathbb{N}^{n+1}$ vérifiant la condition.

Démonstration. On note $f(n,d)$ la somme de l'énoncé puis $g(n,d)$ la somme semblable limitée aux $a \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^{n+1}$. Un argument combinatoire direct montre que

$$f(n,d) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} g(k,d).$$

Par ailleurs, on a assez facilement la formule de récurrence

$$g(n,d+1) = \frac{d+n+1}{(d+1)(n+1)} g(n,d) + \frac{1}{d+1} g(n-1,d)$$

pour $d \geq 0$ et $n \geq 0$ (avec la convention que $g(-1,d) = 0$). On en déduit l'étude de la suite $g(n,d)$ pour n fixé qui donne

$$g(n,d) \leq g(n,n+2) = \frac{2(n+1)}{(n+2)!}$$

(pour $n \geq 0$ et $d \geq 0$). Par conséquent

$$f(n,d) \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \frac{2(k+1)}{(k+2)!}.$$

Le plus grand terme de la somme est obtenu pour un indice k vérifiant $\sqrt{n} - 3 \leq k \leq \sqrt{n}$. Par la formule de Stirling, ce terme est majoré par $C\frac{e^{2\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$ (C est une constante absolue). Si l'on majore les termes d'indices $k \leq 2\sqrt{n}$ par cette borne et les autres par la valeur atteinte pour le plus petit entier k supérieur à $2\sqrt{n}$ (qui, à nouveau par la formule de Stirling, est inférieure à $C'\frac{e^{4(1-\log 2)\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$) on obtient

$$f(n,d) \leq C'' e^{2\sqrt{n}}.$$

En raffinant légèrement les estimations et quitte à faire des vérifications numériques pour les petites valeurs de n, on trouve que l'on peut choisir $C'' = 1$. $\square$

Bibliographie

[BGS] J.-B. Bost, H. Gillet, C. Soulé, *Heights of projective varieties and positive Green forms.* J. Amer. Math. Soc. **7** (1994), 903–1027.

[Bk] N. Bourbaki, *Algèbre commutative, chapitre VIII.* Masson, 1983.

[Br] W.D. Brownawell, *Note on a paper of P. Philippon.* Michigan Math. J. **34** (1987), 461–464.

[E] J.-H. Evertse, *An explicit version of Faltings' product theorem and an improvement of Roth's lemma.* Acta Arithm. **73** (1995), 215–248.

[Fa] G. Faltings, *Diophantine approximation on abelian varieties.* Ann. of Math. **133** (1991), 549–576.

[Fe] R. Ferretti, *An effective version of Faltings' product theorem.* Forum Math. **8** (1996), 401–427.

[H] R. Hartshorne, *Algebraic geometry.* G.T.M. **52**, Springer-Verlag, 1977.

[N] M. Nakamaye, *Multiplicity estimates and the product theorem.* Bull. Soc. Math. France **123** (1995), 155–188.

[P1] P. PHILIPPON, *Sur des hauteurs alternatives III.* J. Math. Pures Appl. **74** (1995), 345–365.

[P2] P. PHILIPPON, *Nouveaux lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs.* Rocky Mountain J. Math. **26** (1996), 1069–1088.

[P3] P. PHILIPPON, *Quelques remarques sur des questions d'approximation diophantienne.* Bull. Austral. Math. Soc. **59** (1999), 332–334.

[R] G. RÉMOND, *Élimination multihomogène (chapitre 5)* et *Géométrie diophantienne multiprojective (chapitre 7).* Dans : Introduction to algebraic independence theory (édité par Y. Nesterenko et P. Philippon), Lecture Notes in Math. **1752**, Springer-Verlag, 2001.

Gaël RÉMOND
Institut Fourier - UMR 5582
Université Grenoble I
BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
France
E-mail : `remond@ujf-grenoble.fr`