Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **13** (2001), 111–124

Diophantine m-tuples and elliptic curves

par Andrej DUJELLA

Résumé. Un m-uplet diophantien est un ensemble de m entiers naturels non nuls tel que le produit quelconque de deux d'entre eux augmenté de 1 est un carré parfait. Dans cet article, nous nous intéressons à certaines propriétés de courbes elliptiques d'équation du type $y^2 = (ax+1)(bx+1)(cx+1)$, où $\{a, b, c\}$ est un triplet diophantien.

Nous considérons en particulier la courbe elliptique E_k définie par l'équation $y^2 = (F_{2k}x+1)(F_{2k+2}x+1)(F_{2k+4}x+1)$, où $k \geq 2$ et F_n désigne le n-ème nombre de Fibonacci. Nous montrons que si le rang de E_k est égal à 1, ou si $k \leq 50$, alors les points entiers sur E_k sont donnés par

$$(x, y) \in \big\{(0, \pm 1),\ (4F_{2k+1}F_{2k+2}F_{2k+3}, \pm(2F_{2k+1}F_{2k+2}-1) \times (2F_{2k+2}^2+1)(2F_{2k+2}F_{2k+3}+1))\big\}.$$

Abstract. A Diophantine m-tuple is a set of m positive integers such that the product of any two of them is one less than a perfect square. In this paper we study some properties of elliptic curves of the form $y^2 = (ax+1)(bx+1)(cx+1)$, where $\{a, b, c\}$ is a Diophantine triple.

In particular, we consider the elliptic curve E_k defined by the equation $y^2 = (F_{2k}x+1)(F_{2k+2}x+1)(F_{2k+4}x+1)$, where $k \geq 2$ and F_n denotes the n-th Fibonacci number. We prove that if the rank of $E_k(\mathbf{Q})$ is equal to one, or $k \leq 50$, then all integer points on E_k are given by

$$(x, y) \in \big\{(0, \pm 1),\ (4F_{2k+1}F_{2k+2}F_{2k+3}, \pm(2F_{2k+1}F_{2k+2}-1) \times (2F_{2k+2}^2+1)(2F_{2k+2}F_{2k+3}+1))\big\}.$$

Andrej Dujella
Department of Mathematics
University of Zagreb
Bijenička cesta 30
10000 Zagreb
Croatia
E-mail : `duje@math.hr`

Manuscrit reçu le 8 octobre 1999.