Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **13** (2001), 157–165

Arakelov computations in genus 3 curves

par Jordi GUÀRDIA

Résumé. Les invariants d'Arakelov des surfaces arithmétiques sont bien connus pour le genre 1 et 2 ([4], [2]). Dans cette note, nous étudions la hauteur modulaire et la self-intersection d'Arakelov pour une famille de courbes de genre 3 possédant beaucoup d'automorphismes, à savoir

$$C_n : Y^4 = X^4 - (4n-2)\,X^2Z^2 + Z^4\,.$$

La théorie d'Arakelov fait intervenir à la fois des calculs arithmétiques et des calculs analytiques. Nous exprimons les périodes de C_n en termes d'intégrales elliptiques. Les substitutions utilisées dans les intégrales fournissent une décomposition de la jacobienne de C_n en produit de trois courbes elliptiques. En utilisant l'isogénie correspondante, nous déterminons le modèle stable de la surface arithmétique définie par C_n.

Une fois calculés les périodes et le modèle stable de C_n, nous sommes en mesure de déterminer la hauteur modulaire et la self-intersection du modèle canonique. Nous donnons une bonne estimation de cette hauteur modulaire, traduite par son comportement logarithmique. Nous donnons également une minoration de la self-intersection qui montre qu'elle peut être arbitrairement grande.

Nous présentons ici nos calculs presque sans démonstrations. Les détails peuvent être lus dans [5].

Abstract. Arakelov invariants of arithmetic surfaces are well known for genus 1 and 2 ([4], [2]). In this note, we study the modular height and the Arakelov self-intersection for a family of curves of genus 3 with many automorphisms:

$$C_n : Y^4 = X^4 - (4n-2)X^2Z^2 + Z^4.$$

Arakelov calculus involves both analytic and arithmetic computations. We express the periods of the curve C_n in terms of elliptic integrals. The substitutions used in these integrals provide a splitting of the jacobian of C_n as a product of three elliptic curves. Using the corresponding isogeny, we determine the stable model of the arithmetic surface given by C_n. Once we have the periods and the stable model of C_n, we can study the modular height and

Manuscrit reçu le 26 octobre 1999.
Partially supported by DGICYT-PD-96-0166.

the self-intersection of the canonical sheaf. We can give a good estimate for the modular height, which reflects its logarithmic behaviour. We provide a lower bound for the self-intersection, which shows that it can be arbitrarily large.

We present here all our calculations on the curves C_n, almost without proofs. Details can be found in [5].

Jordi GUÀRDIA
Dept. algebra i Geometria
Universitat de Barcelona
Gran Via de les Corts Catalanes, 585
E-08007 Barcelona
España
E-mail : guardia@mat.ub.es