Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **13** (2001), 287–302

Sur le théorème du produit

par Gaël RÉMOND

RÉSUMÉ. On donne des versions raffinées effectives du théorème du produit de G. Faltings et de son principal corollaire. Le théorème montre que si l'ensemble des zéros d'indice σ d'un polynôme multihomogène P a une composante commune avec l'ensemble des zéros d'indice $\sigma + \epsilon$ alors cette composante, sous-variété d'un produit d'espaces projectifs, est elle-même un produit à condition que les rapports des degrés de P soient grands en fonction de ϵ. Le corollaire le plus utile implique que, sous une condition plus restrictive, toute composante des zéros d'indice ϵ est contenue dans un produit comme ci-dessus. Dans les deux cas, on sait de plus majorer le degré et la hauteur du produit qui apparaît. J.-H. Evertse et R. Ferretti ont donné des versions effectives de ces résultats. On améliore ces énoncés essentiellement grâce à l'utilisation de la multiplicité de Samuel au lieu de la longueur, en suivant une idée de P. Philippon, qui a donné une version du corollaire. On raffine celle-ci légèrement en travaillant directement avec des degrés et hauteurs multiprojectifs et non en se ramenant au cas projectif. Enfin, pour ce corollaire, on donne deux versions : l'une déduite du théorème par la méthode usuelle, la seconde donnant une condition moins restrictive sur les degrés de P.

ABSTRACT. We present new sharp effective versions of Faltings' product theorem. This result, a generalization of Roth's lemma, shows that if the zeroes of index σ of a multihomogeneous polynomial P have a component Z in common with the zeroes of index $\sigma + \epsilon$ then this Z (subset of a product of projective spaces) is itself a product. Here the index is taken with respect to the degrees δ_i of P as weights and the result holds whenever δ_i/δ_{i+1} is big enough in terms of ϵ. Furthermore, effective versions by Evertse and Ferretti bound the degree and height of Z. If m is the number of factors and c the codimension of Z, our result assumes only $\delta_i/\delta_{i+1} \geq (m/\epsilon)^c$. This is better than the previous bounds by a factor $c!$ and we improve in the same way the estimates for degrees and heights. The key point is the use of Samuel multiplicity introduced in these questions by Philippon, through his zero-estimates. The main corollary of the theorem shows that, in

Manuscrit reçu le 20 juillet 1999.

the above setting, any component of the zeros of index ϵ are contained in a (non-trivial) product under a similar, more restrictive condition on the degrees of P. We deduce first such a corollary, in the usual manner, with the bound $\delta_i/\delta_{i+1} \geq (mn/\epsilon)^n$ (where n is the dimension of the multi-projective space). This condition is the one obtained by Philippon but we get slightly better estimates for degrees and heights (through a direct proof). Last, using a different approach, we prove another corollary with the better bound $\delta_i/\delta_{i+1} \geq (m/\epsilon)^n$; in this case estimates for degrees and heights are less accurate but not significantly in view of certain applications.

Gaël Rémond
Institut Fourier - UMR 5582
Université Grenoble I
BP 74
38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex
France
E-mail : remond@ujf-grenoble.fr