Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **13** (2001), 371–394

Propriétés combinatoires, ergodiques et arithmétiques de la substitution de Tribonacci

par Nataliya CHEKHOVA, Pascal HUBERT
et Ali MESSAOUDI *

Résumé. Nous étudions certaines propriétés combinatoires, ergodiques et arithmétiques du point fixe de la substitution de Tribonacci (introduite par G. Rauzy) et de la rotation du tore $\mathbb{T}^2$ qui lui est associée.

Nous établissons une généralisation géométrique du théorème des trois distances et donnons une formule explicite pour la fonction de récurrence du point fixe. Nous donnons des propriétés d'approximation diophantienne du vecteur de la rotation de $\mathbb{T}^2$: nous montrons, que pour une norme adaptée, la suite de meilleure approximation de ce vecteur est la suite des nombres de Tribonacci. Nous calculons enfin les invariants ergodiques F et F_C du système dynamique associé à la substitution.

Abstract. We study combinatoric, ergodic and arithmetic properties of the fixed point of Tribonacci substitution (first introduced by G. Rauzy) and of the related rotation of the two dimentional torus.

We give a geometric generalization of the three distances theorem and an explicit formula for the recurrence function of the fixed point of the substitution. We state Diophantine approximation's properties of the vector of the rotation of $\mathbb{T}^2$: we prove that, for a suitable norm, the sequence of best approximation of this vector is the sequence of Tribonacci numbers. We compute the ergodic invariants F and F_C of the symbolic system related to the substitution.

1. Introduction

Les suites sturmiennes constituent une famille d'exemples particulièrement intéressants en dynamique symbolique et théorie des langages. On peut les définir, par exemple, comme les suites non ultimement périodiques, de complexité minimale. Elles ont fait l'objet de très nombreuses études,

Manuscrit reçu le 25 octobre 1999.
*Financé par une bourse du CNPq-Brazil, 150016 / 97-2.

tant du point de vue combinatoire (voir par exemple [5], [6], [15], [20], [36], [40], [48]) que pour les interprétations géométriques (cf [4], [28], [47]), arithmétiques sous-jacentes (cf [32],[33], [34],[35], [42], [22]) et ergodiques ([3]). Les suites sturmiennes s'interprètent géométriquement comme les codages "canoniques" des rotations irrationnelles du tore $\mathbb{T}^1$.

Parmi les nombreuses généralisations des suites sturmiennnes, G. Rauzy (cf. [45]) a introduit un exemple de système symbolique qui constitue un "codage naturel" d'une rotation du tore $\mathbb{T}^2$. Le système symbolique est le système associé à la substitution de Tribonacci σ définie par :

$$\begin{aligned} \sigma(0) &= 01 \\ \sigma(1) &= 02 \\ \sigma(2) &= 0. \end{aligned}$$

Du point de vue de la théorie ergodique, le résultat de G. Rauzy signifie que le système symbolique de Tribonacci est métriquement isomorphe à une rotation R_α de $\mathbb{T}^2$.

La rotation R_α de $\mathbb{T}^2$ s'obtient comme le quotient d'un échange de morceaux, dans le plan complexe, de domaine fractal (appelé fractal de Rauzy). Le fractal de Rauzy $\mathcal{E}$ possède diverses propriétés géométriques : c'est un compact de $\mathbb{C}$, connexe, à frontière fractale et à intérieur simplement connexe et il induit un pavage périodique de $\mathbb{C}$ modulo un réseau.

Le fractal de Rauzy a fait l'objet de plusieurs études (voir [2], [45], [30], [37], [38], [49]) et peut être relié à différents problèmes :
- Système de numération complexe [37], [38].
- Représentation géométrique des systèmes dynamiques symboliques [45], [30], [37], [38], [49], [50], [51].
- Méthode de Dekking pour la construction d'objets fractals [30].
- Pavages quasi-périodiques du plan [30].
- Partitions de Markov pour les automorphismes hyperboliques du tore $\mathbb{T}^3$ [2], [37].

Dans cet article, nous étudions certaines propriétés combinatoires et ergodiques du point fixe u de la substitution de Tribonacci qui généralisent des propriétés connues pour les suites sturmiennes.
Nous donnons une généralisation du théorème des trois distances dû à Sós [52], qui a été étudié, récemment, d'un point de vue combinatoire par P. Alessandri et V. Berthé (cf. [1]). Plus précisément, soit ψ la conjugaison entre le système symbolique et la rotation R_α et v un mot fini apparaissant dans u, on appelle $\psi([v])$, l'image du cylindre $[v]$ par l'application ψ ; étant donné un nombre entier n, on note $\psi(L_n(u))$ l'ensemble formé des $\psi([v])$ où v est un mot de longueur n du langage de u. Nous montrons que, pour tout entier n, l'ensemble $\psi(L_n(u))$ est constitué, à translation près, de trois ou quatre sous-ensembles explicites du plan complexe.

Nous donnons une formule explicite pour la *fonction de récurrence* R de la suite de u, qui mesure la longueur minimale qu'il faut prendre dans la suite pour être certain de voir tous les mots de longueur n. On peut vérifier, par exemple, que :

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{R(n)}{n} = 10,605\ldots,$$

ce qui vérifie, dans ce cas particulier, la *conjecture de Rauzy* [46], selon laquelle cette quantité est toujours supérieure à $3,618\ldots$, valeur atteinte pour la suite de Fibonacci. Cette conjecture a été récement résolue par J. Cassaigne [10].
Nous donnons des propriétés d'approximation simultanée du vecteur ξ de la rotation R_α. Nous remarquons que le vecteur ξ est mal approché par les rationnels et nous montrons que, pour une norme adaptée, la suite de meilleure approximation du vecteur ξ (voir définition 6) est la suite numérique de Tribonacci définie par la relation de récurrence :

$$T_0 = T_1 = 0,\ T_2 = 1,\ T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n,\ n \geq 0.$$

Nous calculons, enfin, les *nombres de recouvrement* F_C et F, qui sont des invariants de conjugaison topologique du système dynamique symbolique associé à la suite de Tribonacci ; ils mesurent, respectivement, la proportion de la suite qui peut être recouverte par des apparitions d'un seul mot dont toutes les apparitions sont sans chevauchement, et la proportion de la suite qui peut être recouverte par des apparitions sans chevauchement d'un seul mot, voir les définitions 7, 8, ci-après. Ces invariants ont été calculés par N. Chekhova pour les suites sturmiennes (cf [12]).
Ces résultats symboliques ont une interprétation géométrique, sous forme de propriétés ergodiques nouvelles de la rotation R_α : l'invariant F_C que nous avons calculé se traduit par l'existence de tours de Rokhlin constituées d'ensembles simplement connexes, une tour recouvrant $0,618...$ de l'espace et trois tours recouvrant tout l'espace, ce qui améliore, dans ce cas particulier, certains résultats de Chevallier (cf [14]).

2. Préliminaires

2.1. Dynamique symbolique et langages formels. Soit Λ un alphabet fini ; on considère les suites unilatérales $(x_0, \cdots, x_n, \cdots)$, $x_n \in \Lambda$.
Un *mot* de longueur $l(w) = h$ est une suite finie $w = w_1 \cdots w_h$ d'éléments de Λ. La concaténation de deux mots v et w se note vw. Le mot $w = w_1 \cdots w_h$ *apparaît* au terme i dans une suite (x_n) ou dans un mot $x_0 \cdots x_s$ si $x_i = w_1$, $\ldots$, $x_{i+h-1} = w_h$.
Soit z appartenant à $\Lambda^{\mathbb{N}}$, le *langage* de longueur h, noté $L_h(z)$ est l'ensemble des mots de longueur h apparaissant dans z ; le langage de z est l'ensemble des mots apparaissant dans z.

On définit le décalage T sur l'espace $\Lambda^{\mathbb{N}}$, pour $x = (x_n, n \in \mathbb{N})$, par $(Tx)_n = x_{n+1}$. Pour une suite z, on définit l'ensemble X_z comme l'adhérence dans $\Lambda^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie discrète de l'ensemble $(T^n z, n \in \mathbb{N})$.
Un *système dynamique symbolique* est le système dynamique topologique (X_z, T) pour une suite z sur un alphabet Λ. Le système dynamique symbolique qu'on considère ici est *minimal* (toute orbite est dense) et uniquement ergodique : il y a une seule mesure de probabilité invariante par T ; on peut alors définir des fréquences.
La *fréquence* $f(w)$ d'un mot est $\lim_{n\to+\infty} \frac{N_n(w)}{n+1}$, où $N_n(w)$ est le nombre d'apparitions de w dans $z_0 \cdots z_n$.
Dans un système dynamique symbolique, étant donné un mot w, on appelle *cylindre* associé à w, noté $[w]$, l'ensemble des x de X_z tel que w apparaît dans x au terme 0 ; la *hauteur* du cylindre $[w]$ est la longueur de w. Soit w un élément de $L_n(z)$ et $f(w)$ la fréquence d'apparition du mot v dans z, il est connu que $f(w)$ est égale à la mesure du cylindre $[w]$ (voir [37], [38]).

2.2. La substitution de Tribonacci.

Définition 1. Soit A l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2\}$, nous appelons *substitution de Tribonacci* l'application σ de A dans A^* définie par :

$$\begin{array}{rcl} \sigma(0) & = & 01 \\ \sigma(1) & = & 02 \\ \sigma(2) & = & 0. \end{array}$$

Nous étendons σ en une application de $A^{\mathbb{N}}$ dans $A^{\mathbb{N}}$ par concaténation, c'est-à-dire, pour tout $(a_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$,

$$\sigma(a_0 a_1 \cdots a_n \cdots) = \sigma(a_0)\sigma(a_1)\cdots\sigma(a_n)\cdots$$

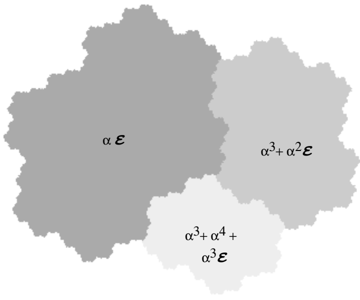
σ est contractante pour la métrique naturelle sur $A^{\mathbb{N}}$, elle a donc un seul point fixe que l'on notera $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

A l'instar de la pratique adoptée dans le cas de *Fibonacci* (substitution définie par $0 \to 01,\ 1 \to 0$), nous appelons *suite de Tribonacci* [9] la suite $u_0 u_1 \cdots$. On remarque que la longueur du mot $\sigma^n 0$ est égale à T_{n+3}, où T_n est le *nombre de Tribonacci* défini par la relation de récurrence :

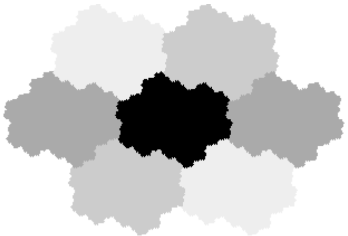
$$T_0 = T_1 = 0,\ T_2 = 1,\ T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n,\ n \geq 0.$$

On est amené à considérer le polynôme $P(x) = x^3 - x^2 - x - 1$. Ce polynôme a une racine réelle $\beta = 1,83929\ldots$ strictement supérieure à 1 et deux racines complexes conjuguées α et $\overline{\alpha}$ de module inférieur strictement à 1, on a donc $\beta|\alpha|^2 = 1$. (Dans tout ce qui suit, α est le conjugué de β de partie imaginaire négative, cette convention est arbitraire et n'a aucune influence sur les résultats ci-dessous ; $\alpha \approx -0.419 - 0.606i$.)

On considère désormais le système dynamique symbolique (X_u, T) associé à u ; il est minimal et uniquement ergodique car la substitution est *primitive* [44].



Le fractal de Rauzy : $\mathcal{E}$



Pavage périodique du plan par le fractal de Rauzy

FIGURE 1. Fractal de Rauzy

2.3. Fractal de Rauzy.

Définition 2. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\{0,1\}$. On dit que ε est une suite admissible si, pour tout entier naturel i, elle vérifie $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\varepsilon_{i+2} = 0$. On note $\mathcal{N}_f$ l'ensemble des suites admissibles.

Remarque. Une suite finie ε à valeurs dans $\{0,1\}$ est admissible si la suite infinie obtenue en prolongeant ε à gauche par une infinité de 0 est admissible.

Définition 3. Le fractal de Rauzy est l'ensemble (voir figure 2.3)

$$\mathcal{E} = \{\sum_{i=3}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i \text{ où } (\varepsilon_i)_{i\geq 3} \in \mathcal{N}_f\}\,.$$

Le fractal de Rauzy est partagé en trois régions similaires qui induisent un autre pavage non périodique et auto-similaire du plan complexe. Ces régions sont : $\mathcal{E}_0 = \alpha\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1 = \alpha^3 + \alpha^2\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_2 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3\mathcal{E}$.

Conjugaison entre le système symbolique et la rotation. Soit R_α la rotation (échange de trois morceaux) sur $\bigcup_{i=0,1,2} \operatorname{int}(\mathcal{E}_i)$ définie par $R_\alpha(z) =$

$z+\alpha^2$ modulo $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\alpha)$ et soit λ la mesure de Lebesgue bidimensionnelle. Le théorème suivant établit le lien entre substitution de Tribonacci et fractal de Rauzy (voir [45], [37], [38]).

Théorème 1 (Rauzy). *Soit m l'unique mesure de probabilité invariante pour le système symbolique $(X_u,\ T)$. Le système dynamique $(X_u,\ T,\ m)$ est métriquement isomorphe au système dynamique $(\mathcal{E}, R_\alpha, \lambda)$ par une application ψ. En outre ψ est continue, surjective et injective sur* $\mathrm{Orb}(u)$, *et pour tout $x \in \Omega$, $\psi(\sigma(x)) = \alpha\psi(x)$.*

Remarque. Pour une définition explicite de ψ, on peut voir [38] page 149.

3. Graphe de Rauzy

Définition 4. Pour une suite u et un entier h, on définit le *graphe de Rauzy* (ou graphe des mots de longueur h) Γ_h de la manière suivante : les sommets sont les points de $L_h(u)$, et il y a une arête de w vers w' si w et w' apparaissent successivement dans u, c'est-à-dire si $w = av$ et $w' = vb$ pour des lettres a et b et un mot v de $L_{h-1}(u)$; on étiquette cette arête par $avb \in L_{h+1}(u)$, et l'ensemble des arêtes est $L_{h+1}(u)$.

Nous étudions ci-dessus la forme des graphes de Rauzy pour la suite de Tribonacci u. Pour tout nombre entier h, le graphe Γ_h comporte un point unique D_h *triprolongeable à droite* (trois arêtes D_h0, D_h1 et D_h2 le quittent) et un point unique G_h *triprolongeable à gauche* (trois arêtes $0G_h$, $1G_h$ et $2G_h$ y arrivent) ; D_h et G_h peuvent être confondus. Pour tout autre point, il y a une seule arête entrante une seule arête sortante. En conséquence, la suite de Tribonacci est une *suite d'Arnoux-Rauzy* et son graphe de Rauzy obéit aux règles définies dans [4], que nous explicitons ci-après :

On partitionne les sommets et les arêtes de Γ_h en quatre *branches* ; une branche est un ensemble de sommets et d'arêtes, et sa *longueur* est le nombre de sommets qu'elle contient.

- La *branche centrale* comprend le sommet G_h, l'unique arête sortante de G_h, le sommet vers lequel va cette arête, l'unique arête sortante de ce sommet, et ainsi de suite jusqu'au sommet D_h inclus ; si $D_h = G_h$, la branche centrale est réduite au sommet $D_h = G_h$.
- pour $i = 0,\ 1,\ 2$, la branche i comprend l'arête D_hi, le sommet vers lequel va cette arête, l'unique arête sortante de ce sommet, et ainsi de suite jusqu'au sommet G_h exclu ; si l'arête D_hi va vers G_h, la branche i est réduite à l'arête D_hi.

Nous verrons que, sauf pour $h = 1$, les longueurs de ces trois dernières branches sont toujours différentes, et les appellerons respectivement *branche courte*, *branche moyenne* et *branche longue*. Le *circuit court* C_h (resp.

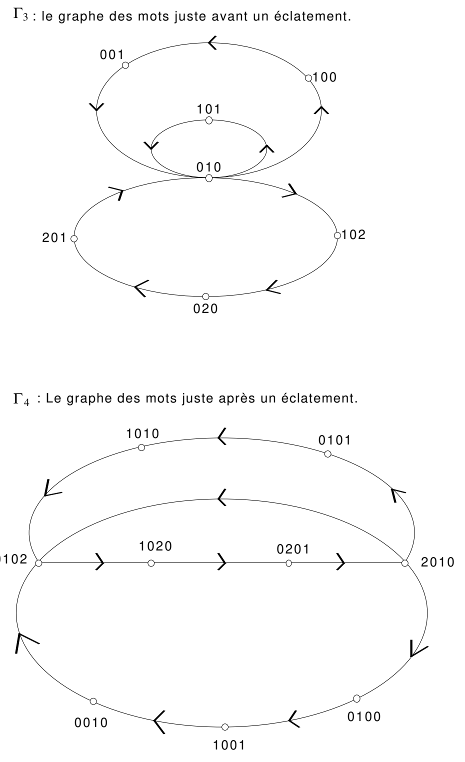


FIGURE 2. Graphes de Rauzy

moyen M_h et *long* L_h) part de G_h et est composé de la branche centrale puis de la branche courte (resp. moyenne et longue).

Les sommets de Γ_{h+1} sont les arêtes de Γ_h ; si $D_h \neq G_h$, les sommets d'une branche de Γ_{h+1} sont les arêtes de la même branche de Γ_h (il y a *fente* d'une arête). De ce fait, la longueur de la branche centrale diminue de 1 quand on passe de h à $h+1$.

Donc, pour une infinité de h, la branche centrale de Γ_h est de longueur 1, par conséquent réduite à un sommet ; d'où $G_h = D_h$: on dit qu'il y a un *éclatement.*

Les différents types d'éclatements sont décrits dans [4], mais nous introduisons ici une nouvelle terminologie ; nous disons qu'il y a un éclatement *renversant* (noté E_L) si les sommets de la branche centrale de Γ_{h+1} sont les arêtes de la branche longue de Γ_h ; il y a un éclatement *moyen* (E_M) si les sommets de la branche centrale de Γ_{h+1} sont les arêtes de la branche moyenne de Γ_h ; il y a un éclatement *court* (E_C) si les sommets de la branche centrale de Γ_{h+1} sont les arêtes de la branche courte de Γ_h ; dans les trois cas, la branche courte de Γ_{h+1} est réduite à une arête (voir figure 3).

Si l'on énumère successivement les mots de longueur h apparaissant dans la suite u au terme i pour $i = 0, \dots n, \dots$, on obtient un chemin infini γ_h dans le graphe Γ_h, composé d'une succession de circuits courts, moyens et longs (le premier étant éventuellement tronqué). Si en h il y a fente, γ_h se déduit de γ_{h+1} en remplaçant C_{h+1} par C_h, M_{h+1} par M_h et L_{h+1} par L_h ; s'il y a éclatement court, γ_h se déduit de γ_{h+1} en remplaçant C_{h+1} par C_h, M_{h+1} par C_hM_h et L_{h+1} par C_hL_h ; s'il y a éclatement moyen, γ_h se déduit de γ_{h+1} en remplaçant C_{h+1} par M_h, M_{h+1} par M_hC_h et L_{h+1} par M_hL_h ; s'il y a éclatement renversant, γ_h se déduit de γ_{h+1} en remplaçant C_{h+1} par L_h, M_{h+1} par L_hC_h et L_{h+1} par L_hM_h.

Dans toute la suite, si, par abus de langage, nous parlons d'un *mot* de la branche centrale (resp. courte, moyenne, longue), il s'agira toujours d'un *sommet* de cette branche. On appelle *longueur* d'une branche son nombre de sommets.

La méthode de [7] permet de calculer de proche en proche les longueurs des circuits et les fréquences des mots de chaque branche ; le résultat suivant est à rapprocher du résultat de [17] sur la suite de Fibonacci.

Proposition 1. *Pour une valeur de h située entre le $n-2$-ème éclatement (non compris) et le $n-1$-ème éclatement (compris), les longueurs des circuits sont*

$$|L_h| = T_{n+2}\,, \quad |M_h| = T_n + T_{n+1}\,, \quad |C_h| = T_{n+1}\,.$$

Tous les mots d'une même branche ont la même fréquence. Les branches, centrale, moyenne et longue, contiennent toujours des sommets, la branche courte en contient si et seulement s'il y a fente pour $h-1$; donc il y a au plus trois ou quatre fréquences différentes. Les fréquences communes respectives des mots de la branche longue, moyenne, courte et centrale sont

$$f_L = \frac{1}{\beta^n}\,, \quad f_M = \frac{1}{\beta^{n+1}}\,, \quad f_C = \frac{1}{\beta^{n+2}}\,, \quad f_+ = f_L + f_M + f_C = \frac{1}{\beta^{n-1}}\,.$$

Preuve. Nous montrons d'abord que tous les éclatements sont renversants ; pour cela, nous montrons par récurrence sur n que pour un h situé juste avant le n-ème éclatement la suite γ_h est la suite de Tribonacci elle-même, où on a remplacé 0 par L_h, 1 par M_h et 2 par C_h. C'est vrai pour $n = 1$ en choisissant pour L_1 le circuit comprenant les sommets 0 et 1, pour M_1 les sommets 0 et 2, pour C_1 le sommet 0, car la décomposition de la suite de Tribonacci en mots 01, 02, 0 est unique. Si c'est vrai pour n, soit h juste avant le n-ème éclatement ; comme γ_h est invariante par σ on peut écrire les mots de longueur $h+1$ apparaissant dans la suite u au terme i pour $i = 0, \dots n, \dots$, en tant qu'arêtes de Γ_h ou sommets de Γ_{h+1}, comme un chemin infini qui est une concaténation de circuits L_h, L_hC_h et L_hM_h ; donc ce chemin ne peut être une concaténation de M_h, M_hC_h et M_hL_h ou de C_h, C_hM_h et C_hL_h ; donc l'éclatement est renversant ; donc la suite

γ_{h+1} s'obtient à partir de γ_h en remplaçant L_h par L_{h+1}, L_hC_h par M_{h+1}, L_hM_h par L_{h+1}, et l'hypothèse de récurrence est vérifiée avant le $n+1$-ème éclatement.

Les longueurs des circuits se calculent donc grâce à l'évolution des graphes indiquée ci-dessus : pour $h=1$, on a

$$|C_1| = 1\,, \quad |L_1| = |M_1| = 2\,;$$

si, pour h, il y a fente, on a

$$|C_{h+1}| = |C_h|\,, \quad |M_{h+1}| = |M_h|\,, \quad |L_{h+1}| = |L_h|\,;$$

si, pour h, il y a éclatement, on a

$$|C_{h+1}| = |L_h|\,, \tag{1}$$

$$|M_{h+1}| = |L_h| + |C_h|\,, \tag{2}$$

$$|L_{h+1}| = |L_h| + |M_h|\,. \tag{3}$$

Soit V un élément de $L_h(u)$ et $f(V)$ sa fréquence, supposons, par exemple, que V appartienne à la branche courte, soit W l'élément de la branche courte tel que $V = xY$ et $W = Yz$ où x et z sont dans $\{0,1,2\}$. Comme V est prolongeable d'une façon unique à droite et à gauche, nous avons $f(V) = f(Vz) = f(Yz)$. Par conséquent tous les mots de la branche courte (respectivement moyenne, longue) ont la même fréquence f_C (resp f_M et f_L). De même, les mots de la branche centrale ont la même fréquence f_+. Par ailleurs, pour tout entier naturel h non nul, nous avons

$$f(D_{h-1}) = f(D_{h-1}0) + f(D_{h-1}1) + f(D_{h-1}2)\,.$$

Il faut étudier deux cas :

Premier cas : Si $D_{h-1} \neq G_{h-1}$ (il y a fente pour $h-1$), D_{h-1} a un seul prolongement à gauche, d'où

$$f(D_h) = f(D_{h-1}) = f(D_{h-1}0) + f(D_{h-1}1) + f(D_{h-1}2)\,.$$

Il en découle que $f_+ = f_C + f_M + f_L$. Dans ce cas, chaque branche contient des sommets, et l'ensemble $\{f(v) \mid v \in L_h(u)\}$ prend au plus quatre valeurs.

Deuxième cas : Si $D_{h-1} = G_{h-1}$, alors il existe x et y dans $\{0,1,2\}$ tels que $G_h = G_{h-1}x$ et $D_h = yD_{h-1} = yG_{h-1}$. Dans ce cas, le graphe Γ_h est en fente et la branche courte est réduite à une arête. Il y a donc, au plus, trois fréquences, qui sont f_+, f_L et f_M. On continuera toutefois à *définir* f_C par $f_C = f_+ - f_L - f_M$, bien qu'à ce stade ce ne soit la fréquence d'aucun mot.

Nous allons maintenant calculer ces fréquences par récurrence ; si $h=1$ alors $f(0) = \frac{1}{\beta}$, $f(1) = \frac{1}{\beta^2}$ et $f(2) = \frac{1}{\beta^3}$ (voir [37]). Le circuit court est réduit à 0, le circuit moyen comprend 0 et 2, le circuit long comprend 0 et

1 (le choix du circuit moyen et du circuit long n'est pas ambigu en raison de la suite du processus, qui impose $f_L > f_M$), et on a

$$f_+ = f(0)\,, \quad f_L = f(1)\,, \quad f_M = f(2)\,.$$

On définit f_C, sans objet à ce stade, puisqu'il n'y a pas de sommet sur la branche courte, par $f_C = f_+ - f_L - f_M$.

Ensuite, le raisonnement ci-dessus, ou celui de [7], montrent que les fréquences sont inchangées par une fente (dans le cas de la première fente après un éclatement, la fréquence f_C qui n'est fréquence d'aucun mot de Γ_h devient la fréquence du mot de la branche courte de Γ_{h+1}), tandis que, s'il y a éclatement, on a

$$\begin{array}{rcl} f'_C + f'_M + f'_L & = & f_L \\ f'_M & = & f_C \\ f'_L & = & f_M\ , \end{array}$$

où f_C, f_L, f_M sont les fréquences avant l'éclatement et f'_C, f'_L et f'_M les fréquences après l'éclatement (juste après l'éclatement, f'_C n'est la fréquence d'aucun mot mais reste définie par $f'_C = f'_+ - f'_L - f'_M$). On poursuit ainsi la récurrence. □

4. Généralisation du théorème des trois distances

Le théorème ci-dessous est une généralisation géométrique du théorème des trois distances.

Théorème 2. *Soit n un entier naturel non nul, l'ensemble $\{\psi([v]) \mid v \in L_n(u)\}$ est constitué de trois ou quatres régions à translations près qui sont de la forme $\alpha^k\mathcal{E}, \alpha^{k+1}\mathcal{E}$ et $\alpha^{k+2}\mathcal{E}$ ou bien $\alpha^k\mathcal{E}, \alpha^{k+1}\mathcal{E}, \alpha^{k+2}\mathcal{E}$ et $\alpha^{k+3}\mathcal{E}$, suivant les valeurs de n.*

Preuve. Montrons que si $f(v) = f(w)$, v et w dans $L_n(u)$, alors les régions $\psi([v])$ et $\psi([w])$ sont similaires au fractal de Rauzy et sont translatées l'une de l'autre.

Considérons les fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par $\psi_0 : z \mapsto \alpha z$, $\psi_1 : z \mapsto \alpha^3 + \alpha^2 z$ et $\psi_2 : z \mapsto \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^3 z$. Nous avons, par construction, $\psi_i(\mathcal{E}) = \psi([i])$ pour tout $i \in \{0,1,2\}$; plus généralement, en vertu du Théorème 1, nous avons le résultat suivant (voir [38] page 151).

Lemme 1. *Soit $v_1 \cdots v_n$ un élément de $L_n(u)$. Il existe $i_1, \ldots, i_r$ des éléments de $\{0,1,2\}$ où $r < n$, tels que $\psi([v_1 \cdots v_n]) = \psi_{i_1} \circ \cdots \circ \psi_{i_r}(\mathcal{E})$. Si, de plus, $v_1 \cdots v_n$ est tri-prolongeable à droite, alors pour tout $j \in \{0,1,2\}$, on a*

$$\psi([v_1 \cdots v_n j]) = \psi_{i_1} \circ \cdots \circ \psi_{i_r} \circ \psi_{n_j}(\mathcal{E}),$$

où $n_j \in \{0,1,2\}$ et $n_j \neq n_i$ si $i \neq j$.

Un corollaire immédiat du Lemme 1 est le suivant.

Corollaire 1. *Pour tout v dans $L_n(u)$, il existe une suite $(\varepsilon_i)_{3\leq i\leq N} \in \mathcal{N}_f$ et un entier $k > N$ tels que*

$$\psi([v]) = \Big(\sum_{i=3}^{N} \varepsilon_i \alpha^i\Big) + \alpha^k \mathcal{E}\,.$$

Le théorème 2 résulte alors de la Proposition 1, du Corollaire 1 et du fait que $f(v)$ est proportionnel à la mesure de Lebesgue de $\psi([v])$ ([38]). □

5. Calcul exact de la fonction de récurrence

Nous calculons, dans ce paragraphe, la fonction de récurrence R de la suite u. Etant donné que u est le point fixe d'une substitution primitive, il était déjà connu (voir [44]) qu'il existe une constante L telle que, pour tout entier n, $R(n) \leq Ln$. L'intérêt de notre résultat est de donner une formule explicite pour $R(n)$.

Définition 5. La fonction de récurrence d'une suite z est la fonction, notée $R(n)$, qui à un entier n associe le plus petit entier (fini ou non) r tel que tout élément de $L_n(z)$ apparaisse dans $L_r(z)$.

On appelle *temps de retour*, noté $l(w)$, d'un mot w dans z, la distance maximale entre deux occurrences consécutives de w dans z, et on note $l(n)$ le maximum des $l(w)$ pour tous les mots $w \in L_n(z)$.

On appelle *mot singulier* de z tout mot $w = xvy$ apparaissant dans z, tel que x et y soient des lettres et qu'il existe $x' \neq x$, $y' \neq y$ tels que $x'vy$ et xvy' apparaissent dans z.

Lemme 2. *Les fonctions R et l sont liées par*

$$\forall h \in \mathbb{N}^*, \quad R(h) \;=\; l(h) + h - 1\,.$$

Pour $h \geq 1$, le temps de retour maximal est donné par

$$l(h) \;=\; \max_{w \in S_h(z)} l(w)\,,$$

où $S_h(z)$ est l'ensemble des mots singuliers de z de longueur inférieure ou égale à h.

L'article [9] précise une méthode générale, essentiellement due à Hedlund et Morse [28], pour calculer la fonction de récurrence d'une suite. Le Lemme 2 est démontré dans [9, Propositions 2 et 3].

Lemme 3. *Dans le cas de la suite de Tribonacci, pour tout $n \geq 3$, il existe un unique mot singulier dont la longueur est située entre le $n-3$-ème et le $n-2$-ème éclatement ; il a pour longueur $g_n = \frac{T_{n+1}+T_{n-1}+1}{2}$ et pour temps de retour*

$$l(w) \;=\; l(g_n) \;=\; T_{n+4}\,.$$

Preuve. Par définition, w est un mot singulier de longueur h si et seulement s'il est l'unique arête d'une branche de Γ_{h-1}, ce qui ne peut se produire que juste après un éclatement.
On se place au $n-3$-ème éclatement. Dans ce cas, la branche centrale est réduite à un seul sommet et la longueur correspondante h est égale à $\frac{|L|+|M|+|C|-3}{2} = \frac{T_{n+1}+T_{n-1}-3}{2}$, en vertu de la Proposition 1 et du fait que la complexité p de la suite u vérifie, pour tout entier h, $p(h) = 2h+1$.

Après cet éclatement la nouvelle branche courte apparaît et il n'y a pas de sommets sur cette branche, son unique arête étant le mot singulier w. Le mot singulier w apparaît à l'étape suivante, $g_n = \frac{T_{n+1}+T_{n-1}+1}{2}$, comme sommet dans le circuit court C, et n'apparaît dans aucun des autres circuits, L et M. Aux étapes suivantes, les circuits restent les mêmes jusqu'à l'éclatement suivant, puis sont remplacés, au fil des éclatements ultérieurs, par des concaténations de ces circuits, représentées par le schéma suivant (1) :

$$\begin{array}{lclclcl} C & & L & & LM & & LMLC \\ M & \longrightarrow & LC & \longrightarrow & LML & \longrightarrow & LMLCLM \\ L & & LM & & LMLC & & LMLCLML. \end{array}$$

Le circuit C (et donc le sommet w) apparaît dans chacun des trois chemins $LMLC$, $LMLCLM$, $LMLCLML$. Comme la suite u est un enchaînement de ces trois chemins, la distance maximale entre deux apparitions de w est réalisée dans le chemin $LMLCLML|LMLC$, qui est effectivement autorisé quand on passe à un éclatement de plus. Donc

$$\begin{aligned} l(w) &= 4|L| + 2|M| + |C| \ = \ 4T_{n+1} + 2(T_n + T_{n-1}) + T_n \\ &= T_{n+4}\,. \end{aligned}$$

□

Les deux lemmes précédents entraînent immédiatement le résultat suivant.

Proposition 2. *La fonction de récurrence de la suite de Tribonacci est donnée par*

$$R(h) = h - 1 + T_{n+4}$$

pour

$$\frac{T_{n+1}+T_{n-1}+1}{2} \leq h < \frac{T_{n+2}+T_n+1}{2}\,, \quad n \geq 1.$$

En particulier,

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{R(n)}{n} = 9 + \frac{6\beta-4}{\beta^2+1} = 10,605\ldots\,,$$

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{R(n)}{n} = 5 + \frac{4\beta-2}{\beta^2+1} = 6,222\ldots\,.$$

6. Approximation diophantienne

Soit $\| \quad \|_0$ une norme sur $\mathbb{R}^2$; pour $q \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}^2$ fixés, on note $|||qx|||_0$ la distance de qx au point entier le plus proche c'est-à-dire

$$|||qx|||_0 = \text{Min} \left\{ \left\| qx - \begin{pmatrix} p \\ r \end{pmatrix} \right\|_0 , \quad (p, r) \in \mathbb{Z}^2 \right\} .$$

On rappelle que (T_n) est la suite des nombres de Tribonacci, β la racine réelle de module strictement supérieur à un de $x^3 = x^2 + x + 1$, α, $\overline{\alpha}$ les deux racines complexes conjuguées ; on note $\xi = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta^2 \end{pmatrix}$ où $\theta = \frac{1}{\beta}$.

Pour tout N, posons $\delta(N) = N\xi - \begin{pmatrix} |u_N|_1 \\ |u_N|_2 \end{pmatrix}$ où $|u_N|_1$ (resp. $|u_N|_2$) est le nombre de 1 (resp. de 2) dans $u_0 \cdots u_{N-1}$. La matrice $B = \begin{pmatrix} -\theta & -\theta \\ 1 - \theta^2 & -\theta^2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, et vérifie, (voir [45]), si $N = \sum_{n \geq 0} \epsilon_n T_{n+3}$, alors

$$\delta(N) = \sum_{n \geq 0} \epsilon_n B^n \delta(1) ,$$

où le vecteur $\delta(1) = \begin{pmatrix} \theta - 1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}$.

Nous appelons norme de Rauzy la norme $\| \quad \|$, telle que, pour tout $v \in \mathbb{R}^2$,

$$\|Bv\| = |\alpha| \|v\| .$$

Remarques.
1) $\|\delta(1)\| = |\alpha|^4$ et $\|\delta(T_{n+3})\| = |\alpha|^{n+4}$.
2) Il existe deux constantes c_0 et c_1 telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_0 \leq \frac{T_{n+3}}{\beta^n} \leq c_1 .$$

Théorème 3 (Rauzy [45]). *Il existe un nombre strictement positif c tel que, pour tout entier naturel non nul q, pour tout entier naturel m,*

$$|||q\xi||| < c\theta^{\frac{m}{2}} \qquad \textit{implique} \qquad \epsilon_i = 0 \quad \forall i < m ,$$

où $q = \sum_{i \geq 0} \epsilon_i T_{i+3}$ et pour tout i, $\epsilon_i \epsilon_{i+1} \epsilon_{i+2} = 0$.

Proposition 3. *Il existe K tel que pour tout q*

$$q^{\frac{1}{2}} |||q\xi||| \geq K . \tag{4}$$

Preuve. D'après le théorème ci-dessus, $|||q\xi||| < c\theta^{\frac{m}{2}}$ implique $q \geq T_{m+3}$. En particulier $|||q\xi||| < cc_0^{\frac{1}{2}} T_{m+3}^{-\frac{1}{2}}$ implique $q \geq T_{m+3}$ et, donc $q < T_{m+3}$ implique $|||q\xi||| \geq cc_0^{\frac{1}{2}} T_{m+3}^{-\frac{1}{2}}$.

Prenons $T_{m+2} \leq q < T_{m+3}$; comme $q < T_{m+3}$, on a

$$|||q\xi||| \ \geq \ cc_0^{\frac{1}{2}} T_{m+3}^{\frac{-1}{2}} \ \geq \ K q^{\frac{-1}{2}} \,, \tag{5}$$

où K est la constante $cc_0(c_1\beta)^{\frac{-1}{2}}$, ce qui donne la conclusion de la proposition. □

Ce résultat signifie que ξ est mal approché par les rationnels. En effet, pour tout vecteur $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, il existe une suite (q_n) et une constante K_0 tels que, pour tout n, $q_n^{\frac{1}{2}} |||q_n v||| \leq K_0$.

La démonstration élémentaire que nous avons donné de la Proposition 3 est spécifique à l'exemple étudié ; néanmoins, cette proposition est une conséquence d'un théorème classique (cf. Cassels [11]) :

Théorème 4 (Cassels). *Soient $x_1, \ldots, x_n$, n nombres réels appartenant à un corps de nombres totalement réel de degré $n+1$ tel que $1, x_1, \ldots, x_n$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$, alors il existe une constante γ telle que, pour tout entier naturel q non nul, on ait l'inégalité :*

$$\max_{1 \leq j \leq n} |||q x_j||| \geq \gamma q^{-\frac{1}{n}} \,.$$

Nous montrons, ci-dessous, que la suite (T_{n+3}) vérifie la propriété

$$T_{m+3}^{\frac{1}{2}} |||T_{m+3}\xi||| \ < \ c' \,. \tag{6}$$

En effet

$$T_{n+3}^{\frac{1}{2}} \left\| T_{n+3}\xi \ - \ \begin{matrix} T_{n+2} \\ T_{n+1} \end{matrix} \right\| \ = \ T_{n+3}^{\frac{1}{2}} \| \sigma(T_{n+3}) \| \ = \ T_{n+3}^{\frac{1}{2}} \theta^{\frac{n}{2}+2} \,.$$

La propriété est vérifiée, vu que : $T_{n+3}^{\frac{1}{2}} \theta^{\frac{n}{2}+2} \leq c_1^{\frac{1}{2}} \theta^2$.

Remarque. Les inégalités (4) et (6) sont vraies avec n'importe quelle norme quitte à modifier les constantes (d'après l'équivalence des normes).

Nous donnons, ci-dessous, une propriété plus forte du vecteur ξ qui exprime, elle aussi, que ξ est mal approché par les rationnels.

Définition 6. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^2$ et $\| \cdot \|_0$ une norme, on dit que la suite croissante d'entiers (q_n) est la suite de meilleure approximation de v pour la norme $\| \cdot \|_0$ si, pour tout n, $|||q_{n+1}v|||_0 < |||q_n v|||_0$ et pour tout $q < q_{n+1}$, $q \neq q_{n+1}$ on a

$$|||q_n v|||_0 < |||qv|||_0 \,.$$

Proposition 4. *Pour toute norme $|| \cdot ||_0$, la suite (q_n) des meilleures approximations du vecteur ξ pour $||.||_0$ vérifie $\left(\frac{q_{n+1}}{q_n}\right)$ est bornée.*

Preuve. Supposons $T_{k+2} \leq q_n < T_{k+3}$. Pour tout $q < q_{n+1}$, on a $|||q\xi|||_0 \geq |||q_n\xi|||_0$. Or, d'après (4), $|||q_n\xi|||_0 \geq Kq_n^{-\frac{1}{2}} > KT_{k+3}^{-\frac{1}{2}}$. D'autre part, pour tout m strictement positif,

$$|||T_{m+k+3}\xi|||_0 \; < \; c'\theta^{\frac{m}{2}} T_{k+3}^{-\frac{1}{2}}$$

avec $c' = \theta^2 \frac{c_1}{c_0^{-\frac{1}{2}}}$.

Comme $\theta < 1$, il existe m_0 tel que $c'\theta^{\frac{m_0}{2}} < K$, par conséquent on a $|||T_{m_0+k+3}\xi|||_0 < |||q_n\xi|||_0$ et $T_{m_0+k+3} > q_{n+1}$, donc

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} \; < \; \frac{T_{m_0+k+3}}{T_{k+2}} \; < \; \frac{c_1}{c_0}\beta^{m_0+1} \; = \; c_2$$

d'où le résultat. □

Théorème 5. *Pour la norme de Rauzy, la suite de meilleure approximation est la suite T_{n+3}.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise le résultat suivant :

Lemme 4 (Rauzy). *(voir* [45]*) Il existe une constante c'' telle que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, pour tout $g \in \mathbb{Z}^2$,*

$$\|q\xi - g\| < c'' \quad \textit{implique} \quad \delta(q) = q\xi - g\,.$$

Soit $n_0 = 8$, alors $\|\delta(T_{n_0+3})\| = |\alpha|^{n_0+4} < c'' \approx 0.03$. Comme $|\alpha| < 1$, pour tout $n \geq n_0$, on a $\|\delta(T_{n+3})\| < c''$; par conséquent, pour $q \geq T_{n_0+3}$, d'après le Lemme 4, pour montrer que la suite (T_{n+3}) est la suite de meilleure approximation, il suffit de vérifier que

$$\|\delta(T_{n+3})\| \; < \; \|\delta(q)\| \quad \text{si} \quad q < T_{n+4} \quad \text{et} \quad q \neq T_{n+3}. \tag{7}$$

Pour $q < T_{n_0+3} = 274$, un nombre fini (273) de vérifications permet de conclure, ces vérifications ont été établies par ordinateur.

Lemme 5. *Il existe Δ strictement positif explicite tel que pour toute suite admissible $\epsilon = (\epsilon_n)_{n\geq 0}$, $\epsilon_0 = 1$,*

$$\Delta(\epsilon) \; = \; \Big\|\delta(1) + \epsilon_1 B\delta(1)\Big\| \; - \; \Big\|\sum_{k=2}^{+\infty} \epsilon_k B^k \delta(1)\Big\| \; > \; \Delta \; > \; 0\,. \tag{8}$$

Preuve. **1-er cas.** Supposons $\epsilon_1 = 0$, on a

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{k=2}^{+\infty} \epsilon_k B^k \delta(1)\Big\| \; &= \; \Big\|B^2\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \epsilon_k B^k \delta(1)\right)\Big\| \; = \; |\alpha|^2 \Big\|\sum_{k=0}^{+\infty} \epsilon_k B^k \delta(1)\Big\| \\ &\leq \; \frac{|\alpha|^2 \|\delta(1)\|}{1 - |\alpha|^3}\end{aligned}$$

et donc

$$\Delta(\epsilon) = \|\delta(1)\| - \frac{|\alpha|^2\|\delta(1)\|}{1-|\alpha|^3} = \frac{|\alpha|^4}{1-|\alpha|^3}(1-|\alpha|^2-|\alpha|^3) = \Delta_1 > 0\,.$$

2-ème cas. Supposons $\epsilon_1 = 1$ et donc $\epsilon_2 = 0$, on a

$$\begin{aligned}\Delta(\epsilon) &= \|\delta(1) + B\delta(1)\| - \|\sum_{k=3}^{+\infty} \epsilon_k B^k \delta(1)\| \\ &\geq \|\delta(1) + B\delta(1)\| - \frac{|\alpha|^7}{1-|\alpha|^3} = \Delta_2 > 0\,.\end{aligned}$$

On vérifie qu'avec $\Delta_1 \approx 0,027$ et $\Delta_2 \approx 0,037$, $\Delta > |\alpha|^{12} \approx 0,025$. □

Soit maintenant $q = \sum_{k\geq 0} \epsilon_k T_{k+3}$. Nous supposons que $q < T_{n+4}$ ce qui est équivalent à $\forall\, k \geq n+1$, $\epsilon(k) = 0$. Nous avons alors $q = \sum_{k=0}^{n} \epsilon_k T_{k+3}$, posons $i = \min\{k,\ \epsilon_k \neq 0\}$, i est différent de n car on suppose que $q \neq T_{n+3}$.

Lemme 6. *Si $n - i \geq 8$ alors*

$$\|\delta(q)\| > \|\delta(T_{n+3})\|\,.$$

Preuve. Grâce au Lemme 5, nous avons

$$\begin{aligned}\|\delta(q)\| &= \Big\|\sum_{k=i}^{n} \epsilon_k B^k \delta(1)\Big\| \\ &\geq \|B^i\delta(1) + \epsilon_{i+1}B^{i+1}\delta(1)\| - \Big\|\sum_{k=i+2}^{n} \epsilon_k B^k \delta(1)\Big\| \\ &\geq |\alpha|^{n+4} = \|\delta(T_{n+3})\|\,.\end{aligned}$$

Si maintenant $n - i \leq 7$

$$\|\delta(q)\| = \left\|\sum_{k=i}^{n} \epsilon_k B^k \delta(1)\right\| = |\alpha|^i \left\|\sum_{k=0}^{n-i} \epsilon_{k+i} B^k \delta(1)\right\|\,.$$

On vérifie aisément que $\|\sum_{k=0}^{n-i} \epsilon_{k+i} B^k \delta(1)\| \geq |\alpha|^{n-i+4}$ par un nombre fini de vérifications (37 vérifications) car $n - i \leq 7$, ce qui achève la démonstration. □

Le Théorème 5 découle de façon immédiate des lemmes précédents. □

6.1. Calcul de la mesure d'irrationalité. Posons

$$K_0 = \inf\{c,\ \text{il existe un infinité de } q \text{ tel que } q^{\frac{1}{2}}|||q\xi||| < c\}$$

La constante K_0 est finie car il existe K tel que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $q^{\frac{1}{2}}|||q\xi||| > K$.

Prenons $T_{n+3} \leq q \leq T_{n+4}$, d'après ce qui précède, $|||q\xi||| \geq |||T_{n+3}\xi|||$ implique

$$q^{\frac{1}{2}}|||q\xi||| \geq q^{\frac{1}{2}}|||T_{n+3}\xi||| \geq T_{n+3}^{\frac{1}{2}}|||T_{n+3}\xi||| = T_{n+3}^{\frac{1}{2}}\|\delta(T_{n+3})\|,$$

donc

$$K_0 = \inf\{c, \text{ il existe un infinité de } n \text{ tels que } T_{n+3}^{\frac{1}{2}}||\delta(T_{n+3})\| < c\}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{n+3}^{\frac{1}{2}}\|\delta(T_{n+3})\| = \lim\limits_{n\to+\infty} T_{n+3}^{\frac{1}{2}}\beta^{n+4}$.

Il est donc clair que

$$K_0 = \lim_{n\to+\infty} T_{n+3}^{\frac{1}{2}}\|\delta(T_{n+3})\| = \frac{1}{\sqrt{\beta^2+2\beta+3}}.$$

Remarque. On peut montrer, par ces méthodes, que l'ensemble des points d'accumulation de l'ensemble $\left\{T_{n+3}^{\frac{1}{2}}\delta(T_{n+3}) | n \in \mathbb{N}\right\}$ est une ellipse.

7. Nombres de recouvrement pour la suite de Tribonacci

Définition 7. Le nombre de recouvrement symbolique F est le plus grand réel a tel que, pour tout entier naturel h_0, il existe $h \geq h_0$, un mot de longueur h, noté w, et une suite d'indices $i_n, n \in \mathbb{N}$, vérifiant

- w apparaît dans u à chaque terme i_n,
- $i_{n+1} > i_n + h - 1$ pour tout n,
- $\#(\{i_n + m\,,\, n \in \mathbb{N},\, 0 \leq m \leq h-1\} \cap \{0, \ldots, N-1\}) \geq aN$ pour tout N assez grand.

Définition 8. Le nombre de recouvrement par cylindres F_C est le plus grand réel a tel que, pour tout entier naturel h_0, il existe $h \geq h_0$, un mot de longueur h, noté w, et une suite d'indices $i_n, n \in \mathbb{N}$, vérifiant

- w apparaît dans u à chaque terme i_n,
- w n'apparaît dans u à aucun autre terme que les i_n,
- $i_{n+1} > i_n + h - 1$ pour tout n,
- $\#(\{i_n + m\,,\, n \in \mathbb{N},\, 0 \leq m \leq h-1\} \cap \{0, \ldots, N-1\}) \geq aN$ pour tout N assez grand.

Ces quantités sont des invariants de conjugaison topologique du système dynamique symbolique associé (voir [12]). Pour les calculer, on utilisera la notion de *fréquence sans chevauchement* : deux apparitions d'un mot w, aux termes i et j, sont *sans chevauchement* si $j > i + h - 1$; on pose $d(w) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{M_n(w)}{n+1}$, où $M_n(w)$ est le nombre maximal d'apparitions sans chevauchement de w que l'on peut trouver dans $u_0 \cdots u_n$ (cette limite existe par unique ergodicité). Calculer F pour un système symbolique revient à calculer, pour des mots arbitrairement longs, les plus grandes valeurs de la quantité $\tau(w) = l(w)d(w)$; nous appelons $\tau(w)$ le *pavage* du mot

w. Calculer F_C revient à considérer $\tau(w)$ pour des mots dont toutes les apparitions sont sans chevauchement.

Proposition 5. *Pour la suite de Tribonacci*

$$F_C = \frac{\beta^2+\beta+1}{\beta^2+2\beta+3} = 0,618421...$$

Preuve. Si, pour h, il y a un éclatement, la branche centrale est de longueur 1, donc $2h+1 = c'+m'+l'-2$, où c', m' et l' sont les longueurs des circuits. On a $c' < m' < l'$ et $c'+m' > l'+1$, si on se place pour un h assez grand ; donc $h > l'-1 > m'-1$.

Juste après cet éclatement, on passe à $h+1$ et aux longueurs $c = l'$, $m = l'+c'$ et $l = l'+m'$; on a $h+1 > c$, et $l \geq m \geq m'+c' \geq h+1$.

On se place après l'éclatement, et on regarde quels mots peuvent avoir toutes leurs apparitions sans chevauchement. Juste après l'éclatement, la longueur des mots est $h+1$ et celle du circuit court est c, et $h+1 > c$; ensuite et jusqu'à l'éclatement suivant, la longueur des mots augmente et la longueur du circuit court reste c. Si w est sur la branche centrale, il apparaît sur les trois circuits, et chaque apparition sur le circuit court chevauche la suivante car $|w| > c$; on ne peut utiliser un tel mot pour calculer F_C. Si w est sur la branche courte, ses apparitions sont sans chevauchement car il n'y a jamais deux circuits courts consécutifs ; on a alors un pavage égal à $|w|f_C$, qui est maximal juste à l'éclatement suivant, où $|w| = \frac{l+m+c-3}{2}$.

Juste après l'éclatement, la longueur des mots vérifie $h+1 \leq m$, par conséquent, les mots de la branche moyenne apparaissent toujours sans chevauchement ; cette propriété se conserve aux étapes suivantes, jusqu'à ce que la longueur des mots atteigne m, ce qui se produit avant l'éclatement suivant, celui-ci ayant lieu quand la longueur des mots vaut $\frac{l+m+c-3}{2} \geq m$. On a donc un pavage possible égal à mf_M, f_M étant la fréquence du circuit moyen, qui ne change pas avant l'éclatement suivant. Quand la longueur du mot dépasse m, on peut améliorer le pavage car après l'éclatement suivant les circuits moyens sont isolés, et le pavage est optimal à l'éclatement, valant $f_M\frac{l+m+c-3}{2}$.

Regardons maintenant les apparitions des mots de la branche longue ; juste après l'éclatement, comme la longueur des mots vérifie $h+1 \leq l$, les mots appartenant à la branche longue apparaissent toujours sans chevauchement ; cette propriété se conserve aux étapes suivantes, jusqu'à ce que la longueur des mots atteigne l, ce qui se produit avant l'éclatement suivant, celui-ci ayant lieu quand la longueur des mots vaut $\frac{l+m+c-3}{2} \geq l$. On a donc un pavage possible égal à lf_L, f_L étant la fréquence du circuit long, qui ne change pas avant l'éclatement suivant. Quand la longueur du mot dépasse l, on ne peut pas améliorer le pavage car, après l'éclatement suivant, il y aura deux circuits longs consécutifs et des apparitions avec chevauchement des mots du circuit long.

Entre le $n-2$-ème et le $n-1$-ème éclatement, $l = T_{n+2}$, $m = T_n + T_{n+1}$, $c = T_{n+1}$, $f_L = \frac{1}{\beta^n}$, $f_M = \frac{1}{\beta^{n+1}}$, $f_C = \frac{1}{\beta^{n+2}}$. On vérifie facilement que le meilleur pavage est donc donné par lf_L, d'où le résultat, sachant que $lf_L + mf_M + cf_C = 1$ et que $\frac{T_{n+1}}{T_n} \to \beta$. □

La ressemblance entre la valeur de F_C et le nombre d'or (qui vaut $1,61803\ldots$) semble purement fortuite. On remarque que F_C pour Tribonacci est strictement plus petit que le F_C de toute suite sturmienne ([12]).

Proposition 6. *Pour la suite de Tribonacci*

$$F = \frac{\beta^2 + 2\beta + 1}{\beta^2 + 2\beta + 3} = 0,80122\ldots.$$

Preuve. Nous devons estimer la fréquence disjointe d'un mot w : la Proposition 1 nous indique la fréquence des mots, mais aussi, en comparant leur longueur à celle des circuits longs et courts, dans quelle mesure leurs apparitions sont sans chevauchements.

On remarque tout d'abord que, si $h_1 < h_2$ donnent les mêmes fréquences et ont les mêmes rapports avec les longueurs des circuits (c'est-à-dire que les parties entières supérieures de $\frac{h}{|L_h|}$, $\frac{h}{|M_h|}$ et $\frac{h}{|C_h|}$ ont les mêmes valeurs pour $h = h_1$ et $h = h_2$), la plus grande fréquence sans chevauchement d'un mot de longueur h_i est la même pour $i = 1$ ou 2. Le pavage $\tau(w)$ sera donc le meilleur pour $h = h_2$; on n'a donc à étudier que les valeurs extrémales de h, c'est-à-dire celles correspondant à l'éclatemment et celles pour lesquelles la partie entière supérieure de $\frac{h}{|L_h|}$, $\frac{h}{|M_h|}$ ou $\frac{h}{|C_h|}$ change de valeur ; en fait, les seules valeurs intéressantes ici sont à l'éclatement, qui est renversant, pour $|w| = m$ et pour $|w| = l$ (en effet, on a toujours $c < |w| < 2m < 2l$, et $|w| = kc$ pour $k > 1$ n'apporte rien de nouveau car on ne voit jamais deux circuits c consécutifs).

Pour h fixé, si w est sur la branche courte (resp. longue) du graphe Γ_h, il ne peut apparaître que sur le circuit court (resp. long) et sa fréquence sans chevauchement est inférieure à la fréquence sans chevauchement d'un mot de la branche centrale. En revanche, un mot de la branche centrale apparaît à la fois sur le circuit long et le circuit court ; la fréquence et la fréquence sans chevauchement sont donc toujours maximales pour ces derniers. Nous prendrons donc toujours un mot w qui se trouve *sur la branche centrale* du graphe ; une apparition de w peut se trouver soit sur le circuit court, C, de Γ_h, soit sur son circuit moyen, M, soit sur son circuit long, L.

Pour $|w| = l$: $|w| > m > c$, et la suite est un enchaînement de circuits L, LC et LM ; le pavage optimal s'obtient en ne gardant que les apparitions de w sur le circuit long, et vaut lf_L.

Pour $|w| = m$, $l > |w| > c$; le pavage optimal s'obtient en ne gardant que les apparitions de w sur le circuit moyen ou long, et vaut $m(f_M + f_L)$.

A l'éclatement, $|w| = \frac{l+m+c-3}{2}$, et donc $|w| > l > m > c$ mais $|w| \leq m + c \leq l + c \leq l + m \leq 2l$. On peut donc sélectionner exactement une apparition sur deux du mot w de la branche centrale, et sa fréquence est $f^+ = \frac{f_C+f_M+f_L}{2}$. D'où un pavage valant (asymptotiquement) $\frac{1}{4}(c + m + l)(f_C + f_L + f_M)$.

Le calcul explicite montre que la deuxième formule l'emporte. □

On remarque que $F < 1$ pour Tribonacci, bien que le système associé soit de rang un, voir Section 8 ci-dessous.

8. Conséquences ergodiques de l'approximation diophantienne

Dans tout système mesuré apériodique, pour tout $\epsilon > 0$ et tout h arbitrairement grand, on peut trouver (en vertu du Lemme de Rokhlin, voir par exemple [26]) des ensembles disjoints $B, TB, \dots, T^{h-1}B$ tels que l'union (appelée *tour de Rokhlin*) de ces ensembles ait une mesure supérieure à $1 - \epsilon$. Un système est de *rang au plus* r, si r tours de Rokhlin permettent d'approcher tout ensemble au sens de la mesure, et le *nombre de recouvrement* est la mesure maximale d'une tour de Rokhlin permettant d'approcher tout ensemble, voir par exemple [21] pour les définitions complètes et un survol de ces notions. Nous nous intéressons à des notions apparentées, lorsque T est la rotation R_α sur le tore $\mathbb{T}^2$, que l'on sait être de rang un [18], mais nous allons demander à B d'être mieux qu'un ensemble mesurable.

Proposition 7. *La rotation R_α a un nombre de recouvrement par ensembles simplement connexes d'au moins $\frac{\beta^2+\beta+1}{\beta^2+2\beta+3}$; plus précisément, pour tout h_0, pour tout $a < \frac{\beta^2+\beta+1}{\beta^2+2\beta+3} = 0,6184\dots$, il existe $h \geq h_0$ et un ensemble B vérifiant*

- *B, $R_\alpha B$, $\dots$, $R_\alpha^{h-1}B$ sont des ensembles simplement connexes disjoints,*
- *$\mu(\cup_{i=0}^{h-1} R_\alpha^i B) \geq a$,*
- *le diamètre de B est inférieur à $\frac{1}{h_0}$.*

Preuve. Le calcul de F_C pour la suite de Tribonacci se traduit immédiatement, dans le système symbolique (X_u, T), avec les notations ci-dessus, par l'existence d'un cylindre B', de hauteur h, vérifiant

- B', TB', $\dots$, $T^{h-1}B'$ sont disjoints,
- $\mu(\cup_{i=0}^{h-1} T^i B') \geq a$.

On prend alors $B = \psi(B')$ et on sait que les $\psi(T^k B') = R_\alpha^k B$ sont simplement connexes [45]. Et B est un cylindre de hauteur arbitrairement grande, donc B' a un diamètre arbitrairement faible. □

Proposition 8. *La rotation R_α est de "rang exact par ensembles simplement connexes" au plus égal à trois ; plus précisément, il existe trois suites de cylindres $B_{n,1}$, $B_{n,2}$, $B_{n,3}$, trois suites d'entiers $h_{n,1}$, $h_{n,2}$, $h_{n,3}$ tendant vers $+\infty$, telles que*

- *les $R_\alpha^j B_{n,i}$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq h_{n,i}$ sont des ensembles simplement connexes disjoints,*
- *la réunion des $R_\alpha^j B_{n,i}$, $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq h_{n,i}$ est de mesure pleine dans $\mathbb{T}^2$,*
- *le diamètre des $B_{n,i}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.*

Preuve. On se place juste après le n-ème éclatement ; le graphe Γ_h n'a de mots que sur trois branches (moyenne, longue et centrale). En raison des propriétés du graphe de Rauzy (voir section 2), on peut alors recouvrir complètement la suite u par des occurences sans chevauchement de trois mots dont les longueurs sont les longueurs des trois branches (voir [4] ; on prend, par exemple, pour chaque branche, le mot formé en concaténant la première lettre de chaque mot de la branche). Cette propriété se traduit par un recouvrement de X_u par les itérés de trois cylindres $B'_{n,i}$; on prend ensuite $B_{n,i} = \psi(B'_{n,i})$. Comme toutes les longueurs des branches tendent vers l'infini avec n, les $B'_{n,i}$ sont des cylindres de hauteur arbitrairement grande, donc les $B_{n,i}$ ont un petit diamètre (ils sont de la forme $\alpha^k \mathcal{E} + V$, k étant un entier arbitrairement grand et V un vecteur) ; les $R_\alpha^k B_{n,i}$ sont simplement connexes ; l'union des itérés des $B'_{n,i}$ étant exactement X_u, son image par ψ est un ensemble de mesure pleine. □

Notons qu'aucun des deux résultats ci-dessus n'implique l'autre (le second impliquerait le premier avec nombre de recouvrement au moins $\frac{1}{3}$). Ces résultats généralisent des résultats sur les rotations de $\mathbb{T}_1$ ([19], [12]) et améliorent des résultats de N. Chevallier sur $\mathbb{T}_2$:

Définition 9. Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^2$, et (q_n) la suite de meilleure approximation de v pour la norme infinie, on dit que v est à quotients partiels bornés si la suite $(\frac{q_{n+1}}{q_n})$ est bornée ; on dit que v est à quotients partiels non bornés dans le cas contraire.

N. Chevallier [14] a montré que toute rotation de $\mathbb{T}^2$ est de rang fini par ensembles convexes. Lorsque le vecteur de la rotation est à quotients partiels non bornés, le résultat est plus précis : la rotation est de rang un par ensembles convexes ; par contre, lorsque le vecteur de la rotation est à quotients partiels bornés, le rang par ensembles convexes est borné par une constante, en général grande, dépendant de $M = \sup_n(\frac{q_{n+1}}{q_n})$. Pour un vecteur donné, on ne sait en général pas si les quotients partiels sont bornés ni quel est l'ordre de grandeur de M ; pour R_α, la section 6 nous permet de dire que les quotients partiels sont bornés, avec $M = \sqrt{\beta}$;

[14] permet alors de borner le rang par ensembles convexes par 3139055, et donc minorer le nombre de recouvrement par convexes par 3.10^{-7}. La Proposition 8 améliore nettement ces bornes, mais en prenant des tours un peu moins "régulières".

9. Remarques additionnelles

Les résultats précédents doivent se généraliser aux substitutions :

$$\sigma_k : \begin{cases} 0 & \to & 01 \\ 1 & \to & 02 \\ & \vdots & \\ (k-1) & \to & 0k \\ k & \to & 0 \end{cases}$$

Il serait intéressant de généraliser ces résultats à d'autres systèmes symboliques. Deux familles d'exemples constituent des généralisations naturelles de la substitution de Tribonacci : les suites d'Arnoux-Rauzy et les points fixes de substitution Pisot unitaires.

La représentation géométrique des substitutions Pisot unitaire est un problème difficile. On ne sait, pour l'instant, généraliser aucun des résultats établis dans cet article pour une substitution Pisot unitaire générique.

En ce qui concerne les suites d'Arnoux-Rauzy, l'étude des graphes des mots peut apporter des réponses à certains problèmes combinatoires et ergodiques. Le calcul des invariants F_C et F a été effectué par N. Chekhova (cf [12]) pour cette classe d'exemples. Les résultats de ces calculs montrent, en particulier, que les systèmes d'Arnoux-Rauzy ont spectre simple. En ce qui concerne l'aritmétique, les propriétés d'approximation diophantienne, mises en évidence pour le vecteur de la rotation R_α, semblent spécifiques à l'exemple de la substitution de Tribonacci. Il serait très intéressant de trouver un lien entre les propriétés d'approximation (par exemple le fait que le vecteur de la rotation soit à quotients partiels bornés) et la combinatoire des éclatements d'un système d'Arnoux-Rauzy.

Bibliographie

[1] P. Alessandri, V. Berthé, *Three distances theorems and combinatorics on words.* L'Enseignement Mathématique **44** (1998), 103–132.

[2] P. Arnoux , *Un exemple de semi-conjugaison entre un échange d'intervalles et une rotation sur le tore.* Bull. Soc. Math. France **116** (1988), 489–500.

[3] P. Arnoux, A. Fisher, *The scenery flow for geometric structures on the torus: the linear setting.* Chinese Annals of Math., à paraître.

[4] P. Arnoux, G. Rauzy, *Représentation géométrique de suites de complexité 2n +1.* Bull. Soc. Math. France **119** (1991), 101–117.

[5] J. Berstel, *Recent results in sturmian words. Developments in language theory* (Magedburg 1995), World Scientific (96), 13–24.

[6] J. Berstel, M. Pocciola, *A geometric proof of the enumeration formula for sturmian words.* Internat. J. Algebra Comput. **3** (1993), 349–355.

[7] V. Berthé, *Fréquences des facteurs des suites sturmiennes.* Theoret. Comp. Sci. **165** (1996), 295–309.

[8] A. Bertrand-Mathis, *Développement en base θ, répartition modulo un de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, langages codés et θ-shift.* Bull. Soc. Math. France **114** (1986), 271–323.

[9] J. Cassaigne, *Limit values of the reccurence quotient of sturmian sequencies.* Theoret. Comp. Sci. **218** (1999), 3–12.

[10] J. Cassaigne, *Communication privée.*

[11] J. W. S. Cassels, *An introduction to Diophantine approximation.* Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics **45**, Hafner Publishing Co., New York, 1972.
An introduction to diophantine approximation. Cambridge Tracs in Mathematics and Mathematical physics **45** (1972), Cambridge Univ. Press.

[12] N. Chekhova, *Covering numbers of rotations.* Theoret. Comput. Sci. 230 (2000), 97–116.

[13] N. Chekhova, *Nombres de recouvrement.* Thèse de l'Université de la Mediterranée, Aix-Marseille II, 1997.

[14] N. Chevallier, *Meilleures approximations d'un élément du tore $\mathbb{T}^2$ et géométrie de la suite des multiples de cet élément.* Acta Arithmetica **78** (1996), 19–35.

[15] E. M. Coven, G. A. Hedlund, *Sequences with minimal block growth.* Math. Systems Theory **7** (1973), 138–153.

[16] F. M. Dekking, *Recurrent Sets.* Adv. Math. **44** (1982), 78–104.

[17] F. M. Dekking, *On the Thue-Morse measure* Acta Univ. Carolin. Math. Phys. **33** (1992), 35–40.

[18] A. del Junco, *Transformations with discrete spectrum are stacking transformations.* Can. J. Math. **24** (1976), 836–839.

[19] A. del Junco, *A family of counterexamples in ergodic theory.* Israel J. Math. **44** (1983), 160–188.

[20] S. Dulucq, D. Gouyou-Beauchamps, *Sur les facteurs des suites de Sturm.* Theoret. Comp. Sci. **71** (1990), 381–400.

[21] S. Ferenczi, *Systems of finite rank.* Colloq. Math. **73** (1997), 35–65.

[22] S. Ferenczi, C. Mauduit, *Transcendence of numbers with a low complexity expansion.* J. Number Theory **47** (1997), 146–161.

[23] A. S. Fraenkel, *Systems of numeration.* Amer. Math. Monthly **92** (1985), 105–114.

[24] C. Frougny, B. Solomyak, *Finite Beta-expansions.* Ergodic Theory Dynam. Systems **12** (1992), 713–723.

[25] W. J. Gilbert, *Complex numbers with three radix expansions.* Can. J. Math. **34** (1982), 1335–1348.

[26] P. Halmos, *Lectures on ergodic theory.* Publications of the Mathematical Society of Japan **3**, The Mathematical Society of Japan, 1956.

[27] G. A. Hedlund, M. Morse, *Symbolic dynamics.* Amer. J. Math. **60** (1938), 815–866.

[28] G. A. Hedlund, M. Morse, *Symbolic dynamics, part II: Sturmian trajectories.* Amer. J. Math. **62** (1940) 1–42.

[29] S. Ito, M. Mizutani, *Potato Exchange Transformations with Fractal Domains.* Preprint.

[30] S. Ito, M. Kimura, *On the Rauzy Fractal.* Japan J. Indust. Appl. Math. **8** (1991), 461–486.

[31] D. E. Knuth, E. Donald, *The art of computer Programming, Vol 2. Seminumerical algorithms*, Second edition. Addison-Wesley Series in Computer Science and Information Processing. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981.

[32] T. Komatsu, *On the characteristic word of the inhomogeneous Beatty sequence.* Bull. Austr. Math. Soc. **51** (1995), 337–351.

[33] T. Komatsu, *A certain power series associated with a Beatty sequence.* Acta Arith. **76** (1996), 109–129.

[34] T. Komatsu, *A certain power series and the inhomogeneous continued fraction expansions.* J. Number Th. **59** (1996), 291–312.

[35] T. Komatsu, *The fractional part of $n\theta + \phi$ and Beatty sequences.* J. Théor. Nombres Bordeaux **7** (1995), 387–406.

[36] A. de luca, F. Mignosi, *Some combinatorial properties of sturmian words.* Theoret. Comp. Sci. **136** (1994), 361–385.

[37] A. MESSAOUDI, *Autour du fractal de Rauzy.* Thèse de l'Université de la Mediterranée, Aix-Marseille II, 1996.

[38] A. MESSAOUDI, *Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy.* J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 135–162.

[39] A. MESSAOUDI, *Frontière du fractal de Rauzy et système de numération complexe.* Acta Arith. **95** (2000), 195–224.

[40] F. MIGNOSI *On the number of factors of Sturmian words.* Theoret. Comp. Sci. **82** (1991), 71–84.

[41] B. MOSSÉ, *Notions de reconnaissabilité pour les substitutions et complexité des suites automatiques.* Bull. Soc. Math. France **124** (1996), 101–108.

[42] K. NISHIOKA, J.TAMURA, I. SHIOKAWA, *Arithmetical properties of a certain power series.* J. Number Th. **42** (1992), 61–87.

[43] B. PRAGGASTIS, *Markov partitions for hyperbolic toral automorphisms.* Ph. D. Thesis, Univ. of Washington, 1992.

[44] M. QUEFFÉLEC, *Substitution Dynamical Systems - Spectral Analysis.* Lecture Notes in Mathematics **1294**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[45] G. RAUZY, *Nombres algébriques et substitutions* . Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.

[46] G. RAUZY, *Suites à termes dans un alphabet fini.* Sém. Théor. Nombres Bordeaux (1982-1983), 1–16.

[47] G. RAUZY, *Mots infinis en arithmétique.* Automata on infinite words, 165–171, Lecture Notes in Comput. Sci. **192**, Springer, Berlin, 1985.

[48] P. SÉÉBOLD, *Fibonacci morphisms and sturmian words.* Theoret. Comp. Sci. **88** (1991), 367–384.

[49] V. SIRVENT, *Properties of geometrical realisations of substitutions associated to a family of Pisot numbers.* Ph. D. Thesis, Warwick, 1993.

[50] V. SIRVENT, *Relationships between the dynamical systems associated to the Rauzy substitutions.* Theoret. Comp. Sci. **164** (1996), 41–57.

[51] V. SIRVENT, *On some dynamical subsets of the Rauzy fractal.* Theoret. Comp. Sci. **180** (1997), 363–370.

[52] V. T. SÓS, *On the distribution mod* 1 *of the sequence* $n\alpha$. Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math. **1** (1958), 127–134.

[53] E. ZECKENDORF, *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas.* Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **41** (1972), 179–182.

Nataliya CHEKHOVA
Université François Rabelais
Département de Mathématiques
Parc de Grandmont, F37200 Tours
France
E-mail : natalya@curie.univ-tours.fr

Pascal HUBERT
Institut de Mathématiques de Luminy
CNRS - UPR 9016 Case 907
163 avenue de Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
E-mail : hubert@iml.univ-mrs.fr

Ali MESSAOUDI
Instituto de matemática
Universidade Federal de Rio do Janeiro
Caixa Postal 68530
21945-970, Rio de Janeiro - RJ
Brazil
E-mail : messaoud@acd.ufrj.br