Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **13** (2001), 529–538

Comparaison de deux notions de rationalité d'un dessin d'enfant

par Layla PHARAMOND DIT D'COSTA

Résumé. Soit f un revêtement ramifié de $\mathbf{P}_1$ défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Lorsqu'on s'intéresse aux propriétés de rationalité de f sur les les corps de nombres, on peut soit exiger que la base soit $\mathbf{P}_1$, soit l'autoriser à être une courbe de genre 0. Nous comparons ces deux points de vue pour les revêtements non ramifiés en dehors de $\{0, 1, \infty\}$.

Abstract. Let f be a ramified covering of $\mathbf{P}^1$ defined over $\overline{\mathbf{Q}}$. When studying the rationality properties of f over number fields, one can ask for the basis to be either $\mathbf{P}^1$ or more generaly a curve of genus 0. We compare both points of view for unramified coverings of $\mathbf{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$.

1. Préambule

Soit C une courbe algébrique (irréductible, projective et lisse) définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et soit f un morphisme fini de C dans la droite projective $\mathbf{P}_1$, non ramifié en dehors de $\{0, 1, \infty\}$, également défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$. Pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, notons $({}^\sigma\mathrm{C}, {}^\sigma f)$ le couple déduit de (C, f) par le changement de base $\mathrm{Spec}(\sigma) : \mathrm{Spec}(\overline{\mathbf{Q}}) \to \mathrm{Spec}(\overline{\mathbf{Q}})$. Si τ est un second élément de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, ${}^\sigma({}^\tau\mathrm{C})$ et ${}^\sigma({}^\tau f)$ s'identifient canoniquement à ${}^{\sigma\tau}\mathrm{C}$ et ${}^{\sigma\tau}f$. Dire que $({}^\sigma\mathrm{C}, {}^\sigma f)$ est isomorphe à (C, f) équivaut à dire qu'il existe un isomorphisme $u_\sigma : \mathrm{C} \to {}^\sigma\mathrm{C}$ défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$ tel que $f = {}^\sigma f \circ u_\sigma$. L'ensemble des σ possédant cette propriété est un sous-groupe ouvert de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, *i.e.* il est de la forme $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathrm{K})$ où K est un corps de nombres.

Définition 1. Le corps K s'appelle le corps de rationalité (ou encore corps des modules, cf. [1]) de (C, f).

Si (C, f) provient par extension des scalaires d'un couple $(\mathrm{C}_\mathrm{E}, f_\mathrm{E})$, où C_E est une courbe algébrique définie sur un sous-corps E de $\overline{\mathbf{Q}}$ et $f_\mathrm{E} : \mathrm{C}_\mathrm{E} \to \mathbf{P}_{1|\mathrm{E}}$ un morphisme défini sur E (on dit alors que (C, f) *possède un modèle sur* E), on a $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}$.

Manuscrit reçu le 7 décembre 1999.
Cet article a été plus qu'inspiré par Joseph Oesterlé et n'aurait jamais existé sans ses contributions.

Par contre, il peut arriver que le triplet $(\mathrm{C}, \mathbf{P}_1, f)$ provienne par extension des scalaires d'un triplet $(\mathrm{C_E}, \mathrm{B_E}, f_\mathrm{E})$, où $f_\mathrm{E} : \mathrm{C_E} \to \mathrm{B_E}$ est un morphisme de courbes algébriques défini sur E, sans que l'on ait $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}$. Nous en donnerons des exemples au § 4. (La courbe $\mathrm{B_E}$ est de genre 0, mais les trois points de $\mathrm{B_E}(\overline{\mathbf{Q}})$ au-dessus desquels f_E est ramifié ne sont pas tous rationnels sur E ; le diviseur formé par ces trois points étant rationnel sur $\mathbf{Q}$ et de degré impair, $\mathrm{B_E}$ est isomorphe sur E à la droite projective $\mathbf{P}_{1|\mathrm{E}}$.) On a sous les hypothèses précédentes, $k \subset \mathrm{E}$ où k est le corps de rationalité de $(\mathrm{C}, \mathbf{P}_1, f)$ au sens suivant :

Définition 2. Le corps de rationalité de $(\mathrm{C}, \mathbf{P}_1, f)$ (ou encore corps de rationalité absolu de (C, f)) est le plus petit corps de nombres k tel que pour tout $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/k)$, il existe un isomorphisme $u_\sigma : \mathrm{C} \to {}^\sigma\mathrm{C}$ et un automorphisme v_σ de $\mathbf{P}_1$, tous deux définis sur $\overline{\mathbf{Q}}$, tels que $v_\sigma \circ f = {}^\sigma f \circ u_\sigma$.

Autrement dit, on dispose de deux notions de rationalité, dépendant de la catégorie des revêtements choisie : soit on exige que la base du revêtment est $\mathbf{P}_1$ (le revêtement étant non ramifié en dehors de $\{0, 1, \infty\}$) et un morphisme d'un revêtement (C, f) dans un revêtement (C', f') est un morphisme $u : \mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ tel que $f' \circ u = f$, soit on exige seulement que la base soit une courbe projective et lisse de genre 0 (le revêtement étant non ramifié en dehors d'un diviseur effectif de degré ≤ 3) et un morphisme de $f : \mathrm{C} \to \mathrm{B}$ dans $f' : \mathrm{C}' \to \mathrm{B}'$ est un couple formé d'un morphisme $u : \mathrm{C} \to \mathrm{C}'$ et d'un morphisme $v : \mathrm{B} \to \mathrm{B}'$ entre les bases, tel que $f \circ u = v \circ f$.

Il est clair que l'on a $k \subset \mathrm{K}$. Le but de cet article est d'analyser les cas où cette inclusion est stricte. Une question analogue a été étudiée par Matzat et Malle dans le cas où le revêtement (C, f) est supposé galoisien et vérifie certaines hypothèses de rigidité ([3], chap. I, § 6, Twisted Rigidity Theorem) ; voir aussi Serre ([4], § 8.2.2).

2. Cas où f est non ramifié au-dessus d'un des points 0, 1, ∞

Soit n le degré de f. Supposons f non ramifié au-dessus d'un des points 0, 1, ∞, par exemple au-dessus du point 1. Le couple (C, f) est alors isomorphe sur $\overline{\mathbf{Q}}$ à $(\mathbf{P}_1, z \mapsto z^n)$: cela résulte du fait que le groupe fondamental de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) - \{0, \infty\}$, isomorphe à $\mathbf{Z}$, possède un unique sous-groupe d'indice n. Son corps de rationalité est $\mathbf{Q}$.

Notons que ce couple (C, f) possède, si $n \neq 1$, une infinité de modèles sur $\mathbf{Q}$ deux à deux non isomorphes, à savoir les couples $(\mathbf{P}_1, z \mapsto az^n)$, où a parcourt un système de représentants de $\mathbf{Q}^\times$ modulo $\mathbf{Q}^{\times^n}$. Par ailleurs, si E est un corps de nombres différent de $\mathbf{Q}$, le couple (C, f) possède des modèles sur E qui ne proviennent pas par extension des scalaires de modèles sur $\mathbf{Q}$, à savoir $(\mathbf{P}_1, z \mapsto az^n)$, où a est un élément de E qui n'appartient pas à $\mathbf{Q}^\times\mathrm{E}$.

3. Cas où f est ramifié au-dessus des trois points 0, 1, ∞

Soit $\mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$ le groupe des permutations de $\{0,1,\infty\}$. Pour tout $\alpha \in \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$, notons s_α l'unique automorphisme de $\mathbf{P}_1$ défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$ qui prolonge α ; il est en fait défini sur $\mathbf{Q}$. On a $s_{\alpha\beta} = s_\alpha \circ s_\beta$.

Supposons que f soit ramifié au-dessus de chacun des trois points de $\{0,1,\infty\}$. Notons $\mathcal{A}$ l'ensemble des $\alpha \in \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$ tels que $(\mathrm{C}, s_\alpha \circ f)$ soit isomorphe à (C, f). Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des $\alpha \in \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$ tels que $(\mathrm{C}, s_\alpha \circ f)$ soit isomorphe à $({}^\sigma\mathrm{C}, {}^\sigma f)$ pour un $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$. Remarquons que si $(\mathrm{C}, s_\alpha \circ f)$ est isomorphe à $({}^\sigma\mathrm{C}, {}^\sigma f)$ et que $(\mathrm{C}, s_\beta \circ f)$ est isomorphe à $({}^\tau\mathrm{C}, {}^\tau f)$, alors $(\mathrm{C}, s_{\beta\alpha} \circ f)$ est isomorphe à $({}^{\sigma\tau}\mathrm{C}, {}^{\sigma\tau} f)$. Il en résulte que $\mathcal{B}$ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$ et que $\mathcal{A}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{B}$.

Proposition. *Avec les notations ci-dessus, le groupe de Galois* $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}/k)$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathcal{B}/\mathcal{A}$.

Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/k)$. Par définition de k, il existe un automorphisme v_σ de $\mathbf{P}_1$, défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$, tel que $({}^\sigma\mathrm{C}, {}^\sigma f)$ soit isomorphe à $(\mathrm{C}, v_\sigma \circ f)$. Le morphisme ${}^\sigma f$ est ramifié au-dessus des trois points 0, 1, ∞ et non ramifié ailleurs. On a donc $v_\sigma(\{0,1,\infty\}) = \{0,1,\infty\}$ et il existe un élément α de $\mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$ tel que $v_\sigma = s_{\alpha^{-1}}$. L'élément α appartient à $\mathcal{B}$ et est déterminé de manière unique modulo $\mathcal{A}$ par σ. L'application qui à σ associe la classe de α modulo $\mathcal{A}$ est un homomorphisme de groupes surjectif de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/k)$ dans $\mathcal{B}/\mathcal{A}$; son noyau est $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathrm{K})$. Par suite, K est une extension galoisienne de k et le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathrm{K}/k)$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{B}/\mathcal{A}$.

En particulier, on a $\mathrm{K} \neq k$ si et seulement si $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$.

Remarques. — 1) La condition $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ impose de sévères restrictions sur la ramification de f : en effet, si $\mathcal{B}$ contient une transposition $\tau_{\{a,b\}}$ (avec $a, b \in \{0,1,\infty\}$), les listes d'indices de ramification des points au-dessus de a et de b sont les mêmes ; si $\mathcal{B}$ contient un cycle d'ordre 3, les listes d'indices de ramification des points au-dessus de 0, 1 et ∞ sont les mêmes, et le degré de f est dans ce cas congru à $2(g-1)$ modulo 3 (où g est le genre de C), d'après la formule de Riemann-Hurwitz.

2) Il existe toujours un sous-groupe $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}$ soit produit semi-direct de $\mathcal{B}'$ par $\mathcal{A}$: on peut prendre $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ si $\mathcal{A} = \{\mathrm{Id}\}$, $\mathcal{B}' = \{\mathrm{Id}\}$ si $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, et $\mathcal{B}'$ égal à un groupe à deux éléments si $\mathcal{A} \simeq \mathcal{A}_3$ et $\mathcal{B} \simeq \mathfrak{S}_3$ (où $\mathcal{A}_3$ et $\mathfrak{S}_3$ représentent respectivement le groupe alterné et le groupe symétrique à trois éléments).

Soit $\mathcal{B}'$ un tel sous-groupe. Il existe des éléments x_0, x_1, x_∞ de $\mathbf{P}_1(\overline{\mathbf{Q}})$ tels que, si σ est un élément de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/k)$ et α l'élément de $\mathcal{B}'$ dont la classe dans $\mathcal{B}/\mathcal{A}$ correspond à σ, on ait $\sigma(x_i) = x_{\alpha(i)}$ pour tout $i \in \{0,1,\infty\}$. Notons h l'automorphisme de $\mathbf{P}_1$, défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$, qui applique i sur x_i pour $i \in \{0,1,\infty\}$. On a ${}^\sigma h = h \circ s_\alpha$, pour σ et α comme ci-dessus, de sorte que le couple $({}^\sigma\mathrm{C}, {}^\sigma(h\circ f))$ est isomorphe à $(\mathrm{C}, h\circ f)$. Il en résulte que le corps de rationalité de $(\mathrm{C}, h\circ f)$ (*i.e.* le corps de nombres k_h tel que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/k_h) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}) \,|\, (\mathrm{C}, h\circ f) \simeq ({}^\sigma\mathrm{C}, ({}^\sigma h\circ f))\})$ est inclus dans k ; l'inclusion réciproque étant évidente, il est égal à k.

3) Reprenons les notations de la remarque précédente. Le groupe des automorphismes de (C, f) coïncide avec celui de $(\mathrm{C}, h\circ f)$; s'il est réduit à l'élément neutre, (C, f) possède, d'après le théorème de descente de Weil ([5], th. 1), un modèle (unique à isomorphisme près) sur K, et $(\mathrm{C}, h\circ f)$ en possède un (unique à isomorphisme près) sur k.

4. L'action de $\mathfrak{S}_{0,1,\infty}$ sur les dessins

Dans les exemples qui seront donnés au § 5, il sera commode de représenter visuellement un revêtement de $\mathbf{P}_1 - \{0, 1, \infty\}$, défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$ par un dessin d'enfant, au sens de Grothendieck (cf. [2]). Rappelons qu'un tel dessin est une surface topologique compacte orientée S, munie d'une classe d'isotopie de plongements d'un 1-complexe fini Γ bicolorié (*i.e.* chaque sommet de Γ est de type 0 ou 1, et chaque arête relie un sommet de type 0 à un sommet de type 1) ; on exige de plus que les composantes connexes du complémentaire de l'image du plongement soient homéomorphes à des disques.

Le dessin qui correspond à un revêtement (C, f) s'obtient en prenant pour S la surface $\mathrm{C}(\mathbf{C})$ et $f^{-1}([0,1])$ pour 1-complexe plongé, les sommets de type 0 étant les points de $f^{-1}(0)$ et ceux de type 1, les points de $f^{-1}(1)$.

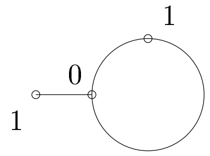
Deux revêtements sont isomorphes si et seulement si les dessins correspondants le sont. Inversement, tout dessin provient d'un revêtement (irréductible si et seulement si S est connexe et non vide).

Un dessin n'ayant pas d'automorphismes non triviaux possède un modèle sur son corps de rationalité (cf. [1], par exemple).

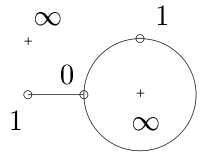
Pour un dessin d'enfant D donné correspondant à un revêtement (C, f) et α une permutation de $\mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$, on peut sans aucun calcul, tracer un représentant de la classe d'isotopie D_α correspondant au revêtement $(\mathrm{C}, s_\alpha\circ f)$. Nous en indiquons la méthode ci-dessous et l'illustrons ensuite par un exemple.

Soit (S, Γ) un couple correspondant comme ci-dessus au dessin D. Les sommets de Γ sont soit de type 0, soit de type 1, et les arêtes seront dites de type $\{0, 1\}$. On peut compléter Γ en un nouveau 1-complexe $\widetilde{\Gamma}$, possédant des sommets de type 0, 1 et ∞ et des arêtes de type $\{0,1\}$, $\{1,\infty\}$, $\{0,\infty\}$, qui triangule S. Les sommets de type 0 ou 1 sont ceux de Γ, les arêtes de type $\{0,1\}$ aussi. On choisit dans chaque composante connexe A de $\mathrm{S} - \Gamma$ un point P qui sera un des sommets de type ∞, et une application continue u de $\{z \in \mathbf{C}, |z| \le 1\}$ dans S tel que u induise un homéomorphisme de $\{z \in \mathbf{C}, |z| < 1\}$ sur A, appliquant 0 sur P, et tel que le cardinal de $u^{-1}(x)$ soit fini pour tout $x \in \Gamma$. Les images des rayons du disque unité sont des courbes reliant P à un point du bord de A. Celles qui aboutissent en un sommet de type 0 (resp. 1) de Γ sont les arêtes de type $\{\infty, 0\}$ (resp. $\{\infty, 1\}$) de $\widetilde{\Gamma}$ issues de P. Le dessin D_α correspond au couple $(\mathrm{S}, \Gamma_\alpha)$, où Γ_α est le graphe bicolorié dont les sommets de type 0 (resp. 1) sont les sommets de $\widetilde{\Gamma}$ de type $\alpha^{-1}(0)$ (resp. $\alpha^{-1}(1)$) et dont les arêtes sont les arêtes de $\widetilde{\Gamma}$ de type $\{\alpha^{-1}(0), \alpha^{-1}(1)\}$.

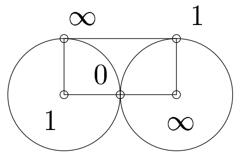
Exemple. — Soit D le dessin correspondant au couple $(\mathbf{P}_1(\mathbf{C}), \Gamma)$, où Γ est le graphe ci-dessous à gauche, et soit α la transposition qui échange 0 et ∞.



Graphe Γ

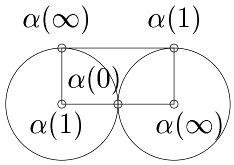


Étape 1

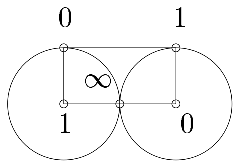


Étape 2

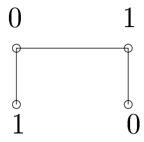
Les composantes connexes de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C}) \setminus \Gamma$ sont appelées les faces de Γ. Pour obtenir le graphe Γ_α, on a successivement, choisi un point ∞ sur chacune de ces faces (étape 1), triangulé la surface en reliant chaque point ∞ aux sommets situés sur le bord de la face qui le contient (plusieurs arêtes issues de ∞ pouvant aboutir à un même sommet de Γ) (étape 2), permuté les noms des sommets suivant α (étape 3 et 4) et retiré les sommets de type ∞ ainsi que les arêtes de type $\{0, \infty\}$ et $\{1, \infty\}$.



Étape 3



Étape 4



Graphe Γ_α

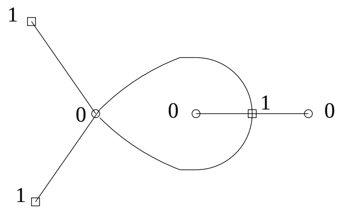
Le couple formé de $\mathbf{P}_1(\mathbf{C})$ et du graphe Γ_α correspond au dessin D_α.

5. Exemples

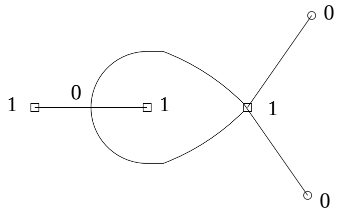
Dorénavant, $\overline{\mathbf{Q}}$ désigne la fermeture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$.

1. *Un exemple où* $\mathcal{A} = \{\mathrm{Id}\}$ *et* $\mathcal{B} = \{\mathrm{Id}, \tau_{\{0,1\}}\}$

Il existe exactement (à isomorphisme près) deux revêtements de $\mathbf{P}_1$, définis sur $\overline{\mathbf{Q}}$, non ramifiés en dehors de $\{0, 1, \infty\}$ et dont les points au-dessus de 0 (resp. 1 ; resp. ∞) ont pour indices de ramification 1, 1 et 4 (resp. 1, 1 et 4 ; resp. 2 et 4). Ils sont de genre 0, et sont représentés par les dessins d'enfant suivants :



Dessin D_1



Dessin D_2

Ces deux revêtements sont de la forme $(\mathbf{P}_1, f_1)$, et $(\mathbf{P}_1, f_2)$, les fonctions de Belyi f_1 et f_2 étant normalisées de sorte que pour chaque $i \in \{0, 1, \infty\}$, l'unique point d'indice de ramification 4 dans la fibre de i soit égal à i. On remarque, en observant les dessins, qu'ils n'ont pas d'automorphismes non triviaux, et que la transposition α qui échange 0 et 1 permet de déduire les fonctions de Belyi l'une de l'autre $f_2 = s_\alpha^{-1} \circ f_1 \circ s_\alpha$. On a :

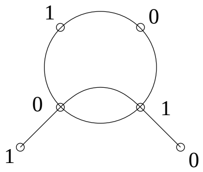
$$f_1(z) = -\frac{2z^4 \left(2\sqrt{5}z^2 + 2(1 - 3\sqrt{5})z - 5(1 - \sqrt{5})\right)}{\left(2\sqrt{5}z - (1 + \sqrt{5})\right)^2},$$
$$f_2(z) = +\frac{2z^4 \left(2\sqrt{5}z^2 - 2(1 + 3\sqrt{5})z + 5(1 + \sqrt{5})\right)}{\left(2\sqrt{5}z + (1 - \sqrt{5})\right)^2}.$$

Il résulte de cela que le corps de rationalité de ces revêtements est $\mathrm{K} = \mathbf{Q}(\sqrt{5})$ et que leur corps de rationalité absolu est $\mathbf{Q}$. Notons h l'automorphisme de P_1 qui applique 0, 1 et ∞ sur respectivement $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et ∞. Le couple $(\mathbf{P}_1, h \circ f_1)$ a pour corps de rationalité $\mathbf{Q}$ d'après le § 3 ; il est isomorphe à $(\mathbf{P}_1, g)$, où g est la fonction rationnelle $h \circ f_1 \circ h^{-1}$ donnée par

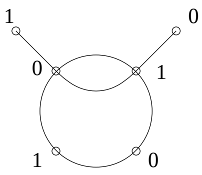
$$g(z) = \frac{z^6 - 4z^5 + 20z^3 + 10z^2 + 12z + 2}{25z^2}.$$

2. *Un exemple où* $\mathcal{A} = \{\mathrm{Id}, \sigma_{(0,1,\infty)}, \sigma_{(\infty,1,0)}\}$ *et* $\mathcal{B} = \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$

Considérons les revêtements de $\mathbf{P}_1$, définis sur $\overline{\mathbf{Q}}$, non ramifiés en dehors de $\{0, 1, \infty\}$ et dont les fibres au-dessus de 0, 1, ∞ sont chacune constituées de trois points admettant comme indices de ramification 1, 2 et 4. Il y a seize revêtements (à isomorphisme près) vérifiant ces conditions. On s'intéresse à ceux représentés par les dessins d'enfant suivants :



Dessin D_1



Dessin D_2

Ils peuvent être choisis de la forme $(\mathbf{P}_1, f_1)$ et $(\mathbf{P}_1, f_2)$ où f_1 et f_2 sont des fonctions de Belyi normalisées de la même manière que celles du premier exemple. Le couple $(\mathbf{P}_1, s_\alpha^{-1} f_1)$ est isomorphe à $(\mathbf{P}_1, f_1)$ si α est une permutation paire, et à $(\mathbf{P}_1, f_2)$ si α est impaire. On a donc $s_\alpha^{-1} f_1 s_\alpha = f_1$ si α est paire et $s_\alpha^{-1} f_1 s_\alpha = f_2$ si α est impaire, vu les normalisations choisies. Les fractions rationnelles $(f_i)_{i\in\{1,2\}}$ sont données par les formules (où c_1 et c_2 désignent les racines de $7c(c-1) = -3 - \sqrt{2}$ de partie imaginaire respectivement positive et négative) suivantes :

$$f_i(x) = \frac{x^4\left((c_i-1)\,x+1\right)^2\left(c_i^2 x - 2c_i + 1\right)}{(x-c_i)^2\left((2c_i-1)\,x + (c_i-1)^2\right)},$$

ce qui s'écrit aussi

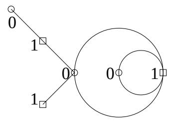
$$f_i(x) - 1 = \frac{(x-1)^4\,(c_i x + 1 - c_i)^2\left((c_i-1)^2\,x - c_i^2\right)}{(x-c_i)^2\left((2c_i-1)\,x + (c_i-1)^2\right)}.$$

Notons h_i l'homographie qui applique les points 0, 1, ∞ sur respectivement $\frac{c_i}{(\sqrt{2}-1)(1-2c_i)}$, $\frac{c_i-1}{(\sqrt{2}-1)(1-2c_i)}$, ∞ ; la fonction $g = h_i \circ f_i \circ h_i^{-1}$ est à coefficients dans $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ et est donnée par :

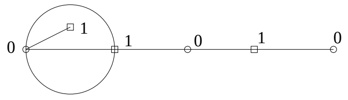
$$g(x) = \Big(-(19+3\sqrt{2})(x+\sqrt{2})x^2\Big)^{-1} \times \Big(x^7 + (4+\sqrt{2})x^6 + 4(1+2\sqrt{2})x^5$$
$$+4(1+2\sqrt{2})x^4 + 5(4+\sqrt{2})x^3 + 2(11+8\sqrt{2})x^2 - 2(1+2\sqrt{2})x - 2(4+3\sqrt{2})\Big).$$

3. *Un exemple où* $\mathcal{A} = \{\mathrm{Id}\}$ *et* $\mathcal{B} = \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$

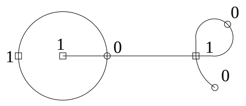
Considérons les six dessins ci-dessous. Ils correspondent à six revêtements de degré 7 de $\mathbf{P}_1$, non-ramifiés en dehors de $\{0, 1, \infty\}$ et dont les fibres au-dessus de 0, 1, ∞ sont chacune constituées de trois points admettant comme indices de ramification 1, 2 et 4. Pour chaque $i \in \{1, ..6\}$ le revêtement correspondant au dessin D_i peut être choisi de la forme $(\mathbf{P}_1, f_i)$, où la fonction de Belyi f_i est normalisée comme dans l'exemple 1.



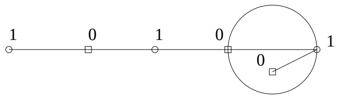
D_1



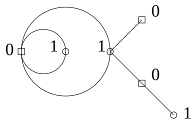
D_2



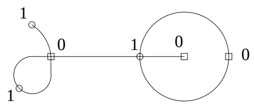
D_3



D_4



D_5



D_6

L'examen des dessins montre que ces fonctions de Belyi se déduisent les unes des autres à l'aide des permutations de $\mathcal{B} = \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$. On a par exemple $f_i = s_{\alpha_i} \circ f_1 \circ s_{\alpha_i}^{-1}$ où $\alpha_1 = \mathrm{I}d$, $\alpha_2 = \sigma_{(0,1,\infty)}$, $\alpha_3 = \sigma_{(\infty,1,0)}$, $\alpha_4 = \tau_{\{1,\infty\}}$, $\alpha_5 = \tau_{\{0,1\}}$, $\alpha_6 = \tau_{\{0,\infty\}}$.

Notons $\sqrt{-6}$ la racine carrée de -6 de partie imaginaire positive. Les fonctions f_i sont de la forme $f_i(\mathrm{Y}) = r_i \dfrac{\mathrm{Y}^4(\mathrm{Y}-a_i)^2(\mathrm{Y}-b_i)}{(\mathrm{Y}-c_i)^2(\mathrm{Y}-d_i)}$, où les a_i sont les six racines du polynôme P irréductible sur $\mathbf{Q}(\sqrt{-6})$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(z) = 5z^6 - 5(1-\sqrt{-6})z^5 - (598+11\sqrt{-6})z^4 + (3501-393\sqrt{-6})z^3 \\ -(7488-1209\sqrt{-6})z^2 + (6885-1215\sqrt{-6})z - 2295 + 405\sqrt{-6},\end{aligned}$$

dont les valeurs approchées (parties imaginaires et réelles étant données à 10^{-6} près) sont
$a_1 \simeq 0,928\,492 + 0,002\,911\,i$, $a_2 \simeq 7,781\,057 + 0,300\,844\,i$, $a_3 \simeq 1,199\,494 + 0,254\,785\,i$, $a_4 \simeq -12,961\,370 - 0,568\,334\,i$, $a_5 \simeq 2,905\,147 - 2,433\,166\,i$, $a_6 \simeq 1,147\,180 - 0,006\,530\,i$.

Les coefficients b_i, c_i, d_i et r_i s'expriment de manière unique en fonction de a_i ; on a ainsi les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}b_i = &-\frac{201226-51257\sqrt{-6}}{1180116}a_i^5 - \frac{20635+14965\sqrt{-6}}{84294}a_i^4 + \frac{3503942-840937\sqrt{-6}}{168588}a_i^3 \\ &-\frac{962097-477203\sqrt{-6}}{12042}a_i^2 + \frac{313394-190769\sqrt{-6}}{2676}a_i - \frac{78601+50062\sqrt{-6}}{1338},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_i = &-\frac{678924-428203\sqrt{-6}}{28912842}a_i^5 - \frac{415470+88955\sqrt{-6}}{4130406}a_i^4 + \frac{11937690-7239433\sqrt{-6}}{4130406}a_i^3 \\ &-\frac{3038808-6044189\sqrt{-6}}{590058}a_i^2 + \frac{552792-3060755\sqrt{-6}}{196686}a_i + \frac{4418+65829\sqrt{-6}}{9366},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_i = &\frac{4232838-552131\sqrt{-6}}{57825684}a_i^5 + \frac{286569+300961\sqrt{-6}}{4130406}a_i^4 - \frac{72745794-8813131\sqrt{-6}}{8260812}a_i^3 \\ &+\frac{35892009-11154977\sqrt{-6}}{983430}a_i^2 - \frac{34622974-12697327\sqrt{-6}}{655620}a_i + \frac{397507-141976\sqrt{-6}}{15610},\end{aligned}$$

$$r_i = \frac{(1-c_i)^2(1-d_i)}{(1-a_i)^2(1-b_i)}.$$

Soit $i \in \{1,..,6\}$. Pour tout $\alpha \in \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$, il existe $j \in \{1,..,6\}$ et $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ tels que $f_j = s_\alpha \circ f_i \circ s_\alpha^{-1}$ et $\sigma(a_i) = a_j$. Ainsi $({}^\sigma\mathbf{P}_1, {}^\sigma f_i) \simeq (\mathbf{P}_1, f_j) \simeq (\mathbf{P}_1, s_{\alpha^{-1}} f_i)$. De ce fait, le corps de rationalité de $(\mathbf{P}_1, f_i)$ est $\mathbf{Q}(a_i)$, alors que son corps de rationalité absolu est $\mathbf{Q}(\sqrt{-6})$; autrement dit, pour chacun de ces dessins, le groupe $\mathcal{A}$ est réduit à l'élément neutre alors que $\mathcal{B} = \mathfrak{S}_{\{0,1,\infty\}}$.

Remarquons que si deux éléments $i, j \in \{1,..,6\}$ vérifient

$$f_j = s_{\tau_{\{1,\infty\}}} \circ f_i \circ s_{\tau_{\{1,\infty\}}}^{-1},$$

alors on a $1 - a_j = \dfrac{1}{1-a_i}$. Par suite les $1 - a_i + \dfrac{1}{1-a_i}$ ne prennent que trois valeurs distinctes, qui sont les racines du polynôme g de degré 3 sur $\mathbf{Q}(\sqrt{-6})$ donné par

$$g(\mathrm{X}) = 5\mathrm{X}^3 - (25 + 5\sqrt{-6})\mathrm{X}^2 - (563 - 14\sqrt{-6})\mathrm{X} - 1109 + 397\sqrt{-6}.$$

Pour $i \in \{1,..,6\}$, notons X_i, la racine de g égale à $1 - a_i + \dfrac{1}{1-a_i}$; les deux autres racines Y_i et Z_i de g s'expriment aussi en fonction de a_i :

$$\begin{aligned}\mathrm{Y}_i = &-\frac{80202 - 27857\sqrt{-6}}{590058}a_i^5 - \frac{28836 + 12575\sqrt{-6}}{84294}a_i^4 + \frac{6986394 - 2351627\sqrt{-6}}{421470}a_i^3 \\ &- \frac{330126 - 265853\sqrt{-6}}{6690}a_i^2 + \frac{340108 - 428099\sqrt{-6}}{6690}a_i - \frac{8796 - 13643\sqrt{-6}}{446},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Z}_i = &-\frac{509856 + 27857\sqrt{-6}}{590058}a_i^5 + \frac{28836 - 71719\sqrt{-6}}{84294}a_i^4 + \frac{43421418 + 2857391\sqrt{-6}}{421470}a_i^3 \\ &- \frac{3554088 - 268009\sqrt{-6}}{6690}a_i^2 + \frac{5801312 - 655681\sqrt{-6}}{6690}a_i - \frac{194580 - 22929\sqrt{-6}}{446}.\end{aligned}$$

Soit $i \in \{1,..,6\}$, considérons l'homographie h_i qui envoie le triplet $(0,1,\infty)$ sur $(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i, \mathrm{Z}_i)$, la fonction $h_i \circ f_i \circ h_i^{-1}$ est définie sur le corps de rationalité absolu des dessins (et ne dépend pas de i) :

$$h_i \circ f_i \circ h_i^{-1}(x) = \frac{n_7x^7 + n_6x^6 + n_5x^5 + n_4x^4 + n_3x^3 + n_2x^2 + n_1x + n_0}{d_7x^7 + d_6x^6 + d_5x^5 + d_4x^4 + d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0},$$

avec

$n_0 = -1\,733\,718\,317 - 2\,391\,213\,516\sqrt{-6}$,
$n_1 = 2\,454\,082\,783 - 3\,705\,870\,411\sqrt{-6}$,
$n_2 = 4\,300\,593\,789 - 1\,773\,850\,626\sqrt{-6}$,
$n_3 = 2\,051\,085\,245 - 288\,080\,715\sqrt{-6}$,
$n_4 = 460\,649\,753 + 9\,813\,744\sqrt{-6}$,
$n_5 = 55\,698\,933 + 8\,631\,459\sqrt{-6}$,
$n_6 = 3\,549\,007 + 973\,686\sqrt{-6}$,
$n_7 = 92\,503 + 36\,819\sqrt{-6}$,

$d_0 = -281\,566\,181 - 211\,453\,588\sqrt{-6}$,
$d_1 = 163\,540\,783 - 308\,258\,251\sqrt{-6}$,
$d_2 = 308\,891\,685 - 129\,515\,754\sqrt{-6}$,
$d_3 = 141\,877\,757 - 21\,924\,539\sqrt{-6}$,
$d_4 = 32\,719\,505 + 146\,440\sqrt{-6}$,
$d_5 = 4\,055\,205 + 533\,715\sqrt{-6}$,
$d_6 = 257\,575 + 66\,350\sqrt{-6}$,
$d_7 = 6\,871 + 2\,483\sqrt{-6}$.

Bibliographie

[1] P. Dèbes, J.-C. Douai, *Algebraic covers : field of moduli versus field of definition.* Ann. scient. Éc. Norm. Sup, tome **30** (1997), 303–338.

[2] A. Grothendieck, *Esquisse d'un programme.* Geometric Galois Actions, Cambridge University Press, **242**, p. 5–48, Éd. L. Schneps et P. Lochak, 1997.

[3] G. Malle, B. H. Matzat, *Inverse Galois Theory.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[4] J.-P. Serre, *Topics in Galois Theory.* Research Notes in Mathematics **1**, Jones and Bartlett Publishers, Boston, MA, 1992.

[5] A. Weil, *The field of definition of a variety.* Amer. J. Math. **78** (1956), 509–524.

Layla Pharamond dit d'Costa
Institut de Mathématiques
UMR 7586, case 247
Université Pierre et Marie Curie
16, rue Clisson
75013 Paris
France
E-mail : pharamon@math.jussieu.fr