Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **14** (2002), 171–185

Produits de Petersson de formes modulaires associées aux valeurs de fonctions L

par Lionel FOURQUAUX

Résumé. Considérons les formes linéaires $f \mapsto L(f, \chi, 1)$ sur l'espace vectoriel des formes paraboliques de poids 2 pour le groupe de congruence $\Gamma_0(p)$, avec χ un caractère de Dirichlet modulo p. Par le produit scalaire de Petersson, on peut leur associer des formes paraboliques. Cet article détermine le produit scalaire de deux de ces formes, pour deux caractères de Dirichlet non triviaux de parités différentes.

Abstract. The linear forms $f \mapsto L(f, \chi, 1)$ on the vector space of cusp forms of weight 2 for the congruence group $\Gamma_0(p)$, with χ a Dirichlet character modulo p, can be associated to cusp forms through the Petersson scalar product. This article shows how to compute the scalar product of two such forms, for two non-trivial Dirichlet characters with opposite parities.

Cet article présente un résultat sur le produit de Petersson de formes modulaires associées à des valeurs de fonctions L que j'ai obtenu au cours de mon stage de DEA. Je voudrais remercier à cette occasion M. Loïc Merel pour toute l'aide et les conseils qu'il m'a apportés tout au long de celui-ci. Je remercie également le rapporteur pour toutes les corrections et additions qu'il m'a suggérées.

1. Introduction

Soit $S_2\left(\Gamma_0\left(p\right)\right)$ l'espace vectoriel complexe des formes paraboliques holomorphes de poids 2 pour le groupe de congruence

$$\Gamma_0\left(p\right) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2\left(\mathbb{Z}\right) \ \Big/ \ p \mid \gamma \right\},$$

avec p un nombre premier fixé.

Manuscrit reçu le 15 Novembre 2000.

Sur cet espace, on a le produit scalaire de Petersson (cf. [Ser70] et [Ogg69]), qui est défini par

$$\langle f, g\rangle \overset{\text{déf}}{=} \iint_D f(z)\overline{g(z)}\,dx\,dy$$

où D est un domaine fondamental de ${}_{\Gamma_0(p)}\backslash^{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H}$ étant le demi-plan de Poincaré.

Si $f \in S_2(\Gamma_0(p))$, on peut écrire

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi \mathbf{i} n z} \qquad (z \in \mathbb{C})$$

et poser

$$L(f,s) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \qquad (s \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Re}\, s > 2).$$

Soit χ un caractère de Dirichlet modulo p. Il définit une application p-périodique de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, que l'on notera aussi χ, avec $\chi(0) = 0$. On pose aussi

$$L(f,\chi,s) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)\frac{a_n}{n^s} \qquad (s \in \mathbb{C},\ \mathfrak{Re}\, s > 2).$$

Les fonctions $s \mapsto L(f,s)$ et $s \mapsto L(f,\chi,s)$ se prolongent en des fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$.

L'application $f \mapsto L(f,\chi,1)$ est une forme linéaire sur $S_2(\Gamma_0(p))$. Il lui correspond donc une unique forme parabolique $\mathsf{h}_\chi \in S_2(\Gamma_0(p))$ telle que

$$L(f,\chi,1) = \langle f, \mathsf{h}_\chi\rangle \qquad \text{pour toute forme } f \in S_2(\Gamma_0(p)).$$

Posons enfin :

- $\tau(\chi) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a) e^{2\pi \mathbf{i} a/p}$ la somme de Gauss associée à χ,
- $B_{1,\chi} \overset{\text{déf}}{=} \sum_{a=1}^{p-1} \chi(a)\left(\frac{a}{p} - \frac{1}{2}\right)$ le premier nombre de Bernoulli généralisé associé à χ,
- $L(\chi,s) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$, pour $s \in \mathbb{C}$ et $\mathfrak{Re}\, s > 1$, puis prolongé analytiquement sur $\mathbb{C}$, la fonction L de Dirichlet associée à χ.

Théorème 1. *Si χ et χ' sont deux caractères de Dirichlet modulo p non triviaux, de parités différentes, on a*

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{h}_\chi, \mathsf{h}_{\chi'} \rangle &= \frac{4\pi^2 \mathbf{i}\chi(-1)}{\tau(\chi)\tau\left(\overline{\chi'}\right)} \left(\chi(-1) \frac{\tau(\overline{\chi})\tau(\chi')}{\tau(\overline{\chi}\chi')} B_{1,\overline{\chi}\chi'} \right. \\ &\qquad + \chi'(-1) \frac{\tau(\chi)\tau\left(\overline{\chi'}\right)}{\tau\left(\chi\overline{\chi'}\right)} B_{1,\chi\overline{\chi'}} - \frac{\tau(\chi)\tau(\chi')}{\tau(\chi\chi')} B_{1,\chi\chi'} \\ &\qquad \left. + \frac{\tau(\overline{\chi})\tau\left(\overline{\chi'}\right)}{\tau\left(\overline{\chi\chi'}\right)} B_{1,\overline{\chi\chi'}} \right) \\ &= \frac{4\pi}{\tau(\chi)\overline{\tau(\chi')}} \left(\tau(\chi)\overline{\tau(\chi')} L(\overline{\chi}\chi', 1) + \overline{\tau(\chi)}\tau(\chi') L\left(\chi\overline{\chi'}, 1\right) \right. \\ &\qquad \left. - \overline{\tau(\chi)\tau(\chi')} L(\chi\chi', 1) - \tau(\chi)\tau(\chi') L\left(\overline{\chi\chi'}, 1\right) \right).\end{aligned}$$

Remarque 1. Le cas où l'un des caractères est trivial se déduit de la preuve de la proposition 14 dans [Mer]. Supposons par exemple que χ soit le caractère trivial, noté ici $\mathbf{1}$. (En particulier, c'est un caractère pair; on prend $\mathbf{1}(n) = 0$ si n est multiple de p). Soit χ' un caractère impair. On obtient :

$$\langle \mathsf{h}_{\mathbf{1}}, \mathsf{h}_{\chi'} \rangle = -\frac{4\pi^2 \mathbf{i}}{p\tau\left(\overline{\chi'}\right)} \left(12 B_{1,\chi'} B_{1,\overline{\chi'}} + (p-1)\left(B_{1,\chi'} + B_{1,\overline{\chi'}} \right) \right)$$

Remarque 2. Un résultat analogue se trouve dans l'article [KZ84]. On considère cette fois-ci l'espace $S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ des formes paraboliques holomorphes de poids k pour le groupe $SL_2(\mathbb{Z})$, avec k un entier pair supérieur ou égal à 2. On définit :

$$L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \quad \text{prolongé analytiquement sur } \mathbb{C}$$

avec $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi \mathbf{i} n z}$. Si q est un entier compris entre 1 et $k-1$, il existe donc une unique fonction $\mathsf{h}_q \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))$ telle que

$$\langle f, \mathsf{h}_q \rangle = L(f,q) \qquad (f \in S_k(SL_2(\mathbb{Z}))).$$

Les auteurs obtiennent alors une formule pour $\langle \mathsf{h}_q, \mathsf{h}_r \rangle$, si q et r deux entiers compris entre 1 et $k-1$ de parités, par un calcul direct, contrairement à ce qui est fait ici.

Remarque 3. On peut s'interroger sur la nécessité de la condition sur les parités des caractères χ et χ'. La première égalité du théorème 1 est alors fausse, comme on le voit en considérant le cas $\chi = \chi'$ (le membre de droite étant nul dans ce cas). En revanche, la seconde expression du produit scalaire est peut-être exacte, même si la méthode employée ici ne permet pas de le montrer. (Il serait intéressant d'essayer d'adapter la méthode de [KZ84] pour essayer d'éliminer cette condition).

Remarque 4. On peut aussi noter que si $(g_j)_j$ est une base orthonormée de $S_2(\Gamma_0(p))$ (par exemple celle des formes propres pour les opérateurs de Hecke), alors on a

$$\mathsf{h}_\chi = \sum_j \overline{L(g_j,\chi,1)} g_j,$$

et donc le produit scalaire auquel on s'intéresse s'écrit

$$\left\langle \mathsf{h}_\chi, \mathsf{h}_{\chi'} \right\rangle = \sum_j \overline{L(g_j,\chi,1)} L(g_j,\chi',1).$$

D'autre part, la théorie des équations fonctionnelles approchées fournit une approximation pour les valeurs de fonctions L considérées :

$$L(f,\chi,1) \simeq \sum_{n=1}^{p} \frac{a_n\chi(n)}{n} - \frac{\tau(\chi)^2}{p} \sum_{n=1}^{p} \frac{\overline{a_n\chi(n)}}{n} \qquad \text{avec } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi \mathbf{i} n z}.$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} \left\langle \mathsf{h}_\chi, \mathsf{h}_{\chi'} \right\rangle \simeq \sum_{\substack{1\leqslant n<p \\ 1\leqslant n'<p}} \Bigg(& \frac{\overline{\chi(n)}\chi'(n')}{nn'} \sum_j \overline{a_{j,n}} a_{j,n'} \\ & - \frac{\overline{\tau(\chi)}^2}{p} \frac{\chi(n)\chi'(n')}{nn'} \sum_j a_{j,n}a_{j,n'} - \frac{\tau(\chi')^2}{p} \frac{\overline{\chi(n)\chi'(n')}}{nn'} \sum_j \overline{a_{j,n}a_{j,n'}} \\ & + \frac{\overline{\tau(\chi)}^2 \tau(\chi')^2}{p^2} \frac{\chi(n)\overline{\chi'(n')}}{nn'} \sum_j a_{j,n}\overline{a_{j,n'}} \Bigg), \end{aligned}$$

où l'on a posé $g_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{j,n} e^{2\pi \mathbf{i} n z}$. Or d'après la formule de Petersson (cf. [Iwa97], théorème 3.6, page 54, ainsi que la paragraphe 4.2), on a

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{nn'}} \sum_j \overline{a_{j,n}} a_{j,n'} = \delta_{nn'} - 2\pi \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{pl} S(n,n',pl) J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{nn'}}{pl}\right),$$

avec la somme de Kloosterman

$$S(n,n',c) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{ad\equiv 1 \pmod c} e^{2\pi \mathbf{i}(na+n'd)/c}$$

et la fonction de Bessel d'ordre 1

$$J_1(x) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+1)!} (x/2)^{2k+1},$$

et $\delta_{nn'}$ le symbole de Kronecker. On peut procéder de même pour la somme $\sum_j a_{j,n}\overline{a_{j,n'}}$. Afin de pouvoir traiter les deux sommes restantes, choisissons les formes g_j de sorte que les $a_{j,n}$ soient tous réels. (Il suffit de prendre une base sur $\mathbb{R}$ de l'espace propre associé à la valeur propre 1 pour l'opérateur $f \longmapsto (z \mapsto \overline{f(-\overline{z})})$. On obtient alors

$$\begin{aligned}\langle \mathsf{h}_\chi, \mathsf{h}_{\chi'}\rangle \simeq \sum_{\substack{1\leqslant n<p\\ 1\leqslant n'<p}} 4\pi\sqrt{nn'}\Bigg(&\frac{\overline{\chi(n)}\chi'(n')}{nn'} - \frac{\overline{\tau(\chi)}^2}{p}\frac{\chi(n)\chi'(n')}{nn'}\\ &- \frac{\tau(\chi')^2}{p}\frac{\overline{\chi(n)\chi'(n')}}{nn'} + \frac{\overline{\tau(\chi)}^2\tau(\chi')^2}{p^2}\frac{\chi(n)\overline{\chi'(n')}}{nn'}\Bigg)\\ &\left(\delta_{nn'} - 2\pi\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{pl}S(n,n',pl)J_1\left(\frac{4\pi\sqrt{nn'}}{pl}\right)\right).\end{aligned}$$

Si l'on supprime les termes contenant des sommes de Kloosterman dans cette dernière formule, on trouve

$$\begin{aligned}4\pi\sum_{n=1}^{p-1}\Bigg(&\frac{\overline{\chi(n)}\chi'(n)}{n} - \frac{\overline{\tau(\chi)}^2}{p}\frac{\chi(n)\chi'(n)}{n}\\ &- \frac{\tau(\chi')^2}{p}\frac{\overline{\chi(n)\chi'(n)}}{n} + \frac{\overline{\tau(\chi)}^2\tau(\chi')^2}{p^2}\frac{\chi(n)\overline{\chi'(n)}}{n}\Bigg),\end{aligned}$$

or on a

$$\sum_{n=1}^{p-1}\frac{\overline{\chi(n)}\chi'(n)}{n} \simeq L(\overline{\chi}\chi',1),$$

donc on trouve approximativement

$$\begin{aligned}&4\pi\Bigg(L(\overline{\chi}\chi',1) - \frac{\overline{\tau(\chi)}^2}{p}L(\chi\chi',1) - \frac{\tau(\chi')^2}{p}L(\overline{\chi\chi'},1)\\ &\qquad\qquad + \frac{\overline{\tau(\chi)}^2\tau(\chi')^2}{p^2}L(\chi\overline{\chi'},1)\Bigg)\\ &= \frac{4\pi}{\tau(\chi)\overline{\tau(\chi')}}\Big(\tau(\chi)\overline{\tau(\chi')}L(\overline{\chi}\chi',1) + \overline{\tau(\chi)}\tau(\chi')L(\chi\overline{\chi'},1)\\ &\qquad\qquad - \overline{\tau(\chi)\tau(\chi')}L(\chi\chi',1) - \tau(\chi)\tau(\chi')L(\overline{\chi\chi'},1)\Big).\end{aligned}$$

On retrouve donc la seconde formule du théorème 1. Remarquons que l'on n'a pas eu besoin de faire intervenir la parité des caractères, ce qui suggère encore que cette condition est superflue. Néanmoins, il ne s'agit ici que de calculs approchés. D'autre part on a omis les termes contenant des sommes de Kloosterman. Ceci indique que l'on pourrait sans doute reformuler le théorème 1 sous forme d'une relation entre sommes de Kloosterman.

2. Traduction en termes de produits d'intersection

La première étape de ce calcul va être de transformer ce problème de formes paraboliques en une question d'intersections de chemins. Pour cela, rappelons un résultat bien connu sur les surfaces de Riemann, dont une démonstration est rappelée en fin d'article (cf. partie 5) :

Lemme 1. *Soit X une surface de Riemann non vide, compacte, connexe. Pour toute 1-forme différentielle harmonique ω, il existe une unique classe d'homologie $C_\omega \in H_1(X, \mathbb{C})$ telle que*

$$\iint_X \omega \wedge \omega' = \int_{C_\omega} \omega'$$

pour toute 1-forme différentielle harmonique ω'. De plus, on a

$$\iint_X \omega \wedge \omega' = C_\omega \bullet C_{\omega'}$$

($C \bullet C'$ désigne le produit d'intersection de C et de C').

Définissons l'espace $\overline{S}_2(\Gamma_0(p))$ des formes paraboliques antiholomorphes par :

$$\overline{S}_2(\Gamma_0(p)) \overset{\text{déf}}{=} \left\{ z \mapsto \overline{f(z)} \quad ; \quad f \in S_2(\Gamma_0(p)) \right\}$$

et l'espace de formes paraboliques harmoniques comme

$$S_2(\Gamma_0(p)) \oplus \overline{S}_2(\Gamma_0(p)).$$

Soit $X_0(p)$ la surface de Riemann ${}_{\Gamma_0(p)}\backslash^{(\mathcal{H} \cup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}))}$. Alors, si $f \in S_2(\Gamma_0(p))$, $f(z)\, dz$ donne par passage au quotient une 1-forme différentielle holomorphe sur $X_0(p)$, et de même, si $f \in \overline{S}_2(\Gamma_0(p))$, $f(z)\, d\overline{z}$ donne une 1-forme différentielle antiholomorphe sur $X_0(p)$. Les deux applications ainsi définies sont des isomorphismes, et l'on en déduit un isomorphisme $f \mapsto \omega_f$ de l'espace vectoriel $S_2(\Gamma_0(p)) \oplus \overline{S}_2(\Gamma_0(p))$ sur l'espace vectoriel des 1-formes différentielles harmoniques sur $X_0(p)$.

Si f et g sont des formes paraboliques holomorphes, on a alors :

$$\langle f, g \rangle = \frac{\mathbf{i}}{2} \iint_{X_0(p)} \omega_f \wedge \overline{\omega_g},$$

et cette dernière expression permet de prolonger le produit de Petersson en une forme bilinéaire non dégénérée sur l'espace $S_2(\Gamma_0(p)) \oplus \overline{S}_2(\Gamma_0(p))$ des formes paraboliques harmoniques.

Notons $C \mapsto \widetilde{C}$ l'application induite par la conjugaison complexe sur les coefficients dans l'espace $H_1(X_0(p), \mathbb{C})$. Pour toute forme différentielle ω, on a $\widetilde{C_\omega} = C_{\overline{\omega}}$.

Le lemme 1 affirme donc que pour toute forme parabolique harmonique f il existe un unique $C_{\omega_f} \in H_1(X_0(p), \mathbb{C})$ tel que

$$-2\mathbf{i}\langle f, g\rangle = \int_{C_{\omega_f}} \overline{\omega_g}$$

pour toute forme parabolique harmonique g, et de plus

$$-2\mathbf{i}\langle f, g\rangle = -\int_{\widetilde{C_{\omega_g}}} \omega_f = C_{\omega_f} \bullet \widetilde{C_{\omega_g}}.$$

Déterminons maintenant une autre classe d'homologie associée à l'application $f \mapsto L(f, \chi, 1)$, pour un caractère χ non trivial.

Si a est un entier compris entre 1 et $p-1$, on notera $\{{}^a/_p, \infty\}$ la classe d'homologie de l'image dans $X_0(p)$ du chemin géodésique reliant ${}^a/_p$ à $\mathbf{i}\infty$ dans $\mathcal{H}$. (Ce sont bien des chemins fermés car ${}^a/_p$ et $\mathbf{i}\infty$ correspondent au même point de $X_0(p)$).

Rappelons que si χ est un caractère de Dirichlet non trivial et si $f \in S_2(\Gamma_0(p))$, on a

$$L(f, \chi, s) = \int_0^\infty t^{s-1} u(\mathbf{i}t)\, dt,$$

avec $\mathfrak{Re}\, s$ assez grand, et pour

$$u(z) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(n) e^{2\pi \mathbf{i} n z} \qquad \text{avec } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi \mathbf{i} n z}.$$

(On trouve cette formule par exemple dans [Ogg69], chapitre I, théorème 1 page I-5 : c'est à partir de cette expression que l'on obtient l'équation fonctionnelle de la fonction L). On a alors

$$\begin{aligned}
\tau(\overline{\chi}) u(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \chi(n) \tau(\overline{\chi}) e^{2\pi \mathbf{i} n z} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{a=1}^{p-1} \overline{\chi(a)} e^{2\pi \mathbf{i} n (z + {}^a/_p)} \\
&= \sum_{a=1}^{p-1} \overline{\chi(a)} f(z + {}^a/_p).
\end{aligned}$$

On peut donc écrire :

$$L(f, \chi, s) = \sum_{a=1}^{p-1} \overline{\chi(a)} \int_0^\infty t^{s-1} f(\mathbf{i}t + {}^a/_p)\, dt.$$

Notons maintenant que f décroît exponentiellement à l'infini et en a/p, ce qui permet de prendre $s = 1$, par prolongement analytique. On en déduit le résultat suivant :

Lemme 2. *Si χ est un caractère de Dirichlet non trivial, on a :*

$$L(f, \chi, 1) = \int_{\theta_\chi} \omega_f \qquad (f \in S_2(\Gamma_0(p)))$$

où

$$\theta_\chi \overset{\text{déf}}{=} \frac{2\pi}{\mathbf{i}\tau(\overline{\chi})} \sum_{a=1}^{p-1} \overline{\chi}(a)\{a/p, \infty\}.$$

Exprimons θ_χ à partir de C_{ω_f} :

Proposition 1. *Si χ est un caractère de Dirichlet non trivial, on a*

$$\theta_\chi = \frac{1}{2\mathbf{i}}\left(\widetilde{C_{\omega_{\mathsf{h}_\chi}}} + \chi(-1) C_{\omega_{\mathsf{h}_{\overline{\chi}}}}\right).$$

Preuve. Si f est une forme modulaire holomorphe, alors on a :

$$\int_{\theta_\chi} \omega_f = L(f, \chi, 1) = \langle f, \mathsf{h}_\chi \rangle = \frac{1}{2\mathbf{i}} \int_{\widetilde{C_{\omega_{\mathsf{h}_\chi}}}} \omega_f.$$

D'autre part, si f est une forme modulaire antiholomorphe, alors $\overline{f}$ est une forme modulaire holomorphe, si bien que l'on obtient :

$$\int_{\theta_\chi} \omega_f = \frac{\chi(-1)}{2\mathbf{i}} \int_{C_{\omega_{\mathsf{h}_{\overline{\chi}}}}} \omega_f.$$

On a donc :

$$\int_{\theta_\chi} \omega_f = \frac{1}{2\mathbf{i}} \int_{\widetilde{C_{\omega_{\mathsf{h}_\chi}}} + \chi(-1) C_{\omega_{\mathsf{h}_{\overline{\chi}}}}} \omega_f$$

pour toute forme parabolique harmonique f, d'où la proposition. □

On en déduit

$$\begin{aligned}
\theta_\chi \bullet \widetilde{\theta_{\chi'}} &= \left(\frac{1}{2\mathbf{i}}\left(\widetilde{C_{\omega_{\mathsf{h}_\chi}}} + \chi(-1) C_{\omega_{\mathsf{h}_{\overline{\chi}}}}\right)\right) \bullet \left(-\frac{1}{2\mathbf{i}}\left(\omega_{C_{\mathsf{h}_{\chi'}}} + \chi'(-1) \widetilde{C_{\omega_{\mathsf{h}_{\overline{\chi'}}}}}\right)\right) \\
&= \frac{\mathbf{i}}{2}\left(\overline{\langle \mathsf{h}_\chi, \mathsf{h}_{\chi'} \rangle} - \chi(-1)\chi'(-1)\left\langle \mathsf{h}_{\overline{\chi}}, \mathsf{h}_{\overline{\chi'}} \right\rangle\right).
\end{aligned}$$

Etudions $\left\langle \mathsf{h}_{\overline{\chi}}, \mathsf{h}_{\overline{\chi'}} \right\rangle$. Pour cela, si f est une forme parabolique holomorphe, définissons

$$\widehat{f}(z) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \overline{a_n} e^{2\pi \mathbf{i} n z} \qquad \text{si } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2\pi \mathbf{i} n z}.$$

$\widehat{f}$ est alors une forme parabolique holomorphe, et on a les deux propriétés suivantes :

Lemme 3. *Si f et g sont deux formes paraboliques holomorphes, on a*

$$\langle f, \widehat{g} \rangle = \langle g, \widehat{f} \rangle.$$

Corollaire 1. *Si ψ est un caractère de Dirichlet, on a*

$$\mathsf{h}_{\overline{\psi}} = \widehat{\mathsf{h}_\psi}.$$

Preuve. Le lemme s'obtient par un simple changement de variable dans l'expression comme intégrale double du produit de Petersson, en utilisant la relation $\widehat{f}(z) = \overline{f(-\overline{z})}$.

Son corollaire s'en déduit alors immédiatement :

$$\left\langle f, \mathsf{h}_{\overline{\psi}} \right\rangle = L\left(f, \overline{\psi}, 1\right) = \overline{L\left(\widehat{f}, \psi, 1\right)} = \left\langle \mathsf{h}_\psi, \widehat{f} \right\rangle = \left\langle f, \widehat{\mathsf{h}_\psi} \right\rangle,$$

donc $\mathsf{h}_{\overline{\psi}} = \widehat{\mathsf{h}_\psi}$ puisque le produit de Petersson est non dégénéré. □

Ainsi, on a :

$$\left\langle \mathsf{h}_{\overline{\chi}}, \mathsf{h}_{\overline{\chi'}} \right\rangle = \left\langle \widehat{\mathsf{h}_\chi}, \widehat{\mathsf{h}_{\chi'}} \right\rangle = \left\langle \mathsf{h}_{\chi'}, \widehat{\widehat{\mathsf{h}_\chi}} \right\rangle = \overline{\left\langle \mathsf{h}_\chi, \mathsf{h}_{\chi'} \right\rangle}$$

si bien que l'on obtient la proposition suivante :

Proposition 2. *Si χ et χ' sont deux caractères de Dirichlet non triviaux, on a*

$$\theta_\chi \bullet \widetilde{\theta_{\chi'}} = \frac{\mathbf{i}}{2}(1 - \chi(-1)\chi'(-1))\overline{\left\langle \mathsf{h}_\chi, \mathsf{h}_{\chi'} \right\rangle}.$$

3. Calcul du produit d'intersection

Calculons maintenant $\theta_\chi \bullet \widetilde{\theta_{\chi'}}$.

Si b est un entier compris entre 1 et $p-1$, on notera $b^\star$ l'unique entier compris entre 1 et $p-1$ tel que $b\,b^\star \equiv -1 \pmod{p}$.

On s'appuiera sur le lemme suivant (lemme des cordes), prouvé dans [Mer96] :

Lemme 4. *Soient a et a' deux éléments de $\{1, \dots, p-1\}$, vérifiant $a \neq a'$ et $a \neq a'^\star$, alors le produit $\{{}^a/_p, \infty\} \bullet \{{}^{a'}/_p, \infty\}$ est égal au nombre d'intersection de la corde reliant $e^{\frac{2\pi \mathbf{i} a^\star}{p}}$ à $e^{\frac{2\pi \mathbf{i} a}{p}}$ avec la corde reliant $e^{\frac{2\pi \mathbf{i} a'^\star}{p}}$ à $e^{\frac{2\pi \mathbf{i} a'}{p}}$.*

Que se passe-t-il si $a = a'$ ou $a = a'^\star$? Dans le premier cas, les chemins sont identiques, donc le produit d'intersection est nul. Dans le second, remarquons que $\begin{pmatrix} u & v \\ -p & a \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p)$, où u et v sont tels que $au + pv = 1$, envoie ${}^{a}/_{p}$ sur ∞ et ∞ sur ${}^{a'}/_{p}$. On a donc deux fois le même chemin, au sens de parcours près, et le produit d'intersection est encore nul.

Il reste à savoir calculer effectivement ces nombres d'intersection. Montrons :

Lemme 5. *Si v, w, x et y sont quatre nombres réels deux à deux distincts compris entre 0 et 1, le nombre d'intersection de la corde reliant le point d'angle $2\pi x$ au point d'angle $2\pi y$ avec la corde reliant le point d'angle $2\pi v$ au point d'angle $2\pi w$ est égal à*

$$\bar{\mathbf{B}}_1(y-w) - \bar{\mathbf{B}}_1(y-v) - \bar{\mathbf{B}}_1(x-w) + \bar{\mathbf{B}}_1(x-v)$$

où $\bar{\mathbf{B}}_1(u)$ est le premier polynôme de Bernoulli rendu périodique : $\bar{\mathbf{B}}_1(u) = u - {}^{1}/_{2}$ si $0 < u < 1$, $\bar{\mathbf{B}}_1(0) = 0$, et $\bar{\mathbf{B}}_1(u+1) = \bar{\mathbf{B}}_1(u)$ pour tout $u \in \mathbb{R}$.

Preuve. Il suffit de montrer que

$$\bar{\mathbf{B}}_1(x-w) - \bar{\mathbf{B}}_1(x-v) = \begin{cases} k-1 & \text{si les points d'angles } 2\pi w,\ 2\pi x \text{ et } 2\pi v \text{ se succèdent dans cet ordre dans le sens trigonométrique,} \\ k & \text{si les points d'angles } 2\pi v,\ 2\pi x \text{ et } 2\pi w \text{ se succèdent dans cet ordre dans le sens trigonométrique,} \end{cases}$$

pour un réel k indépendant de x. Or les deux membres de l'égalité ci-dessus sont 1-périodiques en x, v et w, si bien qu'on peut se ramener à x et v compris entre w et $w+1$ (mais plus nécessairement entre 0 et 1), et l'on a dans ce cas :

x	w		v		$w+1$
$\mathbf{B}_1(x-w)$		$x-w-{}^{1}/_{2}$		$x-w-{}^{1}/_{2}$	
$\mathbf{B}_1(x-v)$		$x-v+{}^{1}/_{2}$		$x-v-{}^{1}/_{2}$	
$\mathbf{B}_1(x-w) - \mathbf{B}_1(x-v)$		$v-w-1$		$v-w$	

d'où le résultat, avec $k = v - w$. □

On en déduit :

Proposition 3. *Si χ et χ' sont deux caractères de Dirichlet non triviaux, alors on a la relation*

$$\theta_\chi \bullet \widetilde{\theta_{\chi'}} = \frac{4\pi^2 \chi'(-1)}{\tau(\overline{\chi})\tau(\chi')} \sum_{1 \leqslant a, a' \leqslant p-1} \overline{\chi}(a)\chi'(a') \Biggl(\bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a-a'}{p}\right) - \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a-a'^{\star}}{p}\right) - \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a^{\star}-a'}{p}\right) + \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a^{\star}-a'^{\star}}{p}\right) \Biggr).$$

Preuve. En effet, en combinant le lemme 4 et le lemme 5, on a :

$$\theta_\chi \bullet \widetilde{\theta_{\chi'}} = \frac{4\pi^2\chi'(-1)}{\tau\,(\overline{\chi})\tau\,(\chi')} \sum_{a=1}^{p-1}\sum_{a'=1}^{p-1} \overline{\chi}(a)\chi'(a')\ \{{}^{a}/_{p},\infty\} \bullet \{{}^{a'}/_{p},\infty\}$$

$$= \frac{4\pi^2\chi'(-1)}{\tau\,(\overline{\chi})\tau\,(\chi')} \sum_{\substack{(a,a')\in\{1,\dots,p-1\}^2\\ a\neq a'\ ,\ a\neq a'^\star}} \overline{\chi}(a)\chi'(a')\Bigg(\bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a-a'}{p}\right)$$

$$- \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a-a'^\star}{p}\right) - \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a^\star-a'}{p}\right) + \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a^\star-a'^\star}{p}\right)\Bigg)$$

$$= \frac{4\pi^2\chi'(-1)}{\tau\,(\overline{\chi})\tau\,(\chi')} \sum_{1\leqslant a,a'\leqslant p-1} \overline{\chi}(a)\chi'(a')\Bigg(\bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a-a'}{p}\right)$$

$$- \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a-a'^\star}{p}\right) - \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a^\star-a'}{p}\right) + \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a^\star-a'^\star}{p}\right)\Bigg).$$

□

4. Retour sur le produit scalaire

Comparons la proposition 3 avec la proposition 2. On obtient alors :

$$(1-\chi(-1)\chi'(-1))\big\langle \mathsf{h}_\chi, \mathsf{h}_{\chi'}\big\rangle$$

$$= \frac{8\mathbf{i}\pi^2\chi(-1)}{\tau\,(\chi)\tau\,\big(\overline{\chi'}\big)} \sum_{1\leqslant a,a'\leqslant p-1} \chi(a)\overline{\chi'}(a')\Bigg(\bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a-a'}{p}\right) - \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a-a'^\star}{p}\right)$$

$$- \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a^\star-a'}{p}\right) + \bar{\mathbf{B}}_1\left(\frac{a^\star-a'^\star}{p}\right)\Bigg).$$

Posons

$$(\psi * \psi')(b) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{\substack{0\leqslant a,a'\leqslant p-1\\ a+a'\equiv b \pmod p}} \psi(a)\psi'(a'),$$

on a alors :

$$(1-\chi(-1)\chi'(-1))\big\langle \mathsf{h}_\chi, \mathsf{h}_{\chi'}\big\rangle$$

$$= \frac{8\mathbf{i}\pi^2\chi(-1)}{\tau\,(\chi)\tau\,\big(\overline{\chi'}\big)}\big(\chi(-1)B_{1,\overline{\chi}*\chi'} + \chi'(-1)B_{1,\chi*\overline{\chi'}}$$

$$- B_{1,\chi*\chi'} - \chi(-1)\chi'(-1)B_{1,\overline{\chi}*\overline{\chi'}}\big).$$

Rappelons l'identité suivante, qui donne la valeur d'une somme de Jacobi en fonction de sommes de Gauss (cf. [Lan90], chapitre 1, propriété GS 3 page 4) :

$$\sum_{a=1}^{p-1} \psi(a)\psi'(1-a) = \frac{\tau(\psi)\tau(\psi')}{\tau(\psi\psi')},$$

avec ψ et ψ' des caractères non triviaux tels que leur produit soit non trivial. On en déduit :

Lemme 6. *Si ψ et ψ' sont deux caractères non triviaux, on a la relation* $B_{1,\psi*\psi'} = \dfrac{\tau(\psi)\tau(\psi')}{\tau(\psi\psi')} B_{1,\psi\psi'}$.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
&(1-\chi(-1)\chi'(-1))\langle \mathsf{h}_\chi, \mathsf{h}_{\chi'}\rangle \\
&\quad = \frac{8\mathbf{i}\pi^2\chi(-1)}{\tau(\chi)\tau\left(\overline{\chi'}\right)}\Bigg(\chi(-1)\frac{\tau(\overline{\chi})\tau(\chi')}{\tau(\overline{\chi}\chi')}B_{1,\overline{\chi}\chi'} + \chi'(-1)\frac{\tau(\chi)\tau\left(\overline{\chi'}\right)}{\tau\left(\chi\overline{\chi'}\right)}B_{1,\chi\overline{\chi'}} \\
&\qquad\qquad - \frac{\tau(\chi)\tau(\chi')}{\tau(\chi\chi')}B_{1,\chi\chi'} - \chi(-1)\chi'(-1)\frac{\tau(\overline{\chi})\tau\left(\overline{\chi'}\right)}{\tau\left(\overline{\chi\chi'}\right)}B_{1,\overline{\chi\chi'}}\Bigg).
\end{aligned}$$

Si χ et χ' sont de parités différentes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\langle \mathsf{h}_\chi, \mathsf{h}_{\chi'}\rangle &= \frac{4\pi^2\mathbf{i}\chi(-1)}{\tau(\chi)\tau\left(\overline{\chi'}\right)}\Bigg(\chi(-1)\frac{\tau(\overline{\chi})\tau(\chi')}{\tau(\overline{\chi}\chi')}B_{1,\overline{\chi}\chi'} \\
&+ \chi'(-1)\frac{\tau(\chi)\tau\left(\overline{\chi'}\right)}{\tau\left(\chi\overline{\chi'}\right)}B_{1,\chi\overline{\chi'}} - \frac{\tau(\chi)\tau(\chi')}{\tau(\chi\chi')}B_{1,\chi\chi'} + \frac{\tau(\overline{\chi})\tau\left(\overline{\chi'}\right)}{\tau\left(\overline{\chi\chi'}\right)}B_{1,\overline{\chi\chi'}}\Bigg).
\end{aligned}$$

Enfin, cette formule peut être exprimée en termes de valeurs de fonctions L de Dirichlet, à l'aide de l'expression bien connue de $L(\psi,1)$ (cf. [Lan90], chapitre 3, page 74, en corollaire du théorème 2.2) :

Théorème 2. *Si ψ est un caractère impair, alors* $L(\psi,1) = \dfrac{\pi\mathbf{i}\psi(-1)}{\tau\left(\overline{\psi}\right)}B_{1,\overline{\psi}}$.

5. Appendice

Prouvons maintenant le lemme 1. Pour cela, considérons sur la surface X un complexe Δ, formé de sommets, d'arêtes orientées et de faces simplement connexes (par exemple une triangulation).

On peut maintenant choisir un complexe dual de Δ (cf. [PG78]), noté Δ^*. Pour cela, prenons à l'intérieur de chaque face F un point s_F, et pour chaque paire de faces adjacentes selon une arête a, relions les deux points associés par une arête a^*, orientée de sorte que l'intersection de a et a^* se fasse dans le sens direct. Les sommets s_F et les arêtes a^* forment alors le complexe dual Δ^*. On peut supposer que ses faces sont aussi simplement connexes (par exemple en prenant pour Δ une triangulation assez fine). Notons que le bidual Δ^{**} de Δ peut être choisi comme Δ avec les sens de parcours des arêtes renversés.

On a alors

$$\iint_X \omega \wedge \omega' = \sum_{F \text{ face de } \Delta} \int_F \omega \wedge \omega'$$

$$= \sum_{F \text{ face de } \Delta} \int_{\partial F} \Omega_F \wedge \omega'$$

d'après le théorème de Stokes, avec Ω_F une primitive de ω sur F, car $d(\Omega_F \wedge \omega') = \omega \wedge \omega' + 0$. Choisissons ici $\Omega_F(z) \overset{\text{déf}}{=} \int_{s_F}^{z} \omega$, où l'intégrale est prise le long d'un chemin contenu dans la face F

$$= \sum_{a \text{ arête de } \Delta} \left(\int_a \Omega_{F_{a,+}} \wedge \omega' - \int_a \Omega_{F_{a,-}} \wedge \omega' \right)$$

où $F_{a,+}$ et $F_{a,-}$ sont les deux faces adjacentes à l'arête a

$$= \sum_{a \text{ arête de } \Delta} \int_a \left(\Omega_{F_{a,+}} - \Omega_{F_{a,-}}\right) \wedge \omega'$$

$$= - \sum_{a \text{ arête de } \Delta} \int_{a^*} \omega \int_a \omega'$$

$$\text{car} \quad \Omega_{F_{a,+}}(z) - \Omega_{F_{a,-}}(z) = \int_{s_{F_{a,+}}}^{z} \omega - \int_{s_{F_{a,-}}}^{z} \omega = \int_{s_{F_{a,+}}}^{s_{F_{a,-}}} \omega = - \int_{a^*} \omega.$$

Définissons donc C_ω comme la classe d'homologie dans $H_1(X, \mathbb{C})$ du 1-cycle

$$- \sum_{a \text{ arête de } \Delta} \int_{a^*} \omega \quad [a],$$

qui est fermé, car si s est un sommet de Δ, on a

$$\sum_{\substack{a \text{ arête} \\ \text{partant de } s}} \int_{a^*} \omega_f \quad - \quad \sum_{\substack{a \text{ arête} \\ \text{arrivant en } s}} \int_{a^*} \omega_f \quad = \quad 0.$$

Considérons en effet le membre de gauche. Renversons l'orientation des arêtes partant de s, alors l'orientation des arêtes duales est aussi renversée, donc les intégrales associées changent de signe. Finalement, on obtient l'intégrale de ω sur un chemin fermé autour de s, ce qui est bien nul puisque les faces du complexe dual sont simplement connexes.

D'autre part, par construction, on a

$$\iint_X \omega \wedge \omega' = \int_{C_\omega} \omega'$$

comme voulu.

A priori, C_ω dépend de Δ. Il s'agit maintenant de prouver l'unicité. Soient deux cycles C et C' vérifiant la propriété :

$$\int_C \omega' = \int_{C'} \omega' = \iint_X \omega \wedge \omega'$$

pour toute 1-forme différentielle harmonique ω'. Alors

$$\int_{C-C'} \omega' = 0$$

pour toute 1-forme différentielle harmonique ω', ce qui entraine que C et C' sont dans la même classe d'homologie (cf. [Lan82], cette propriété découle du théorème de Riemann Roch). Donc on a l'unicité, et C_ω ne dépend pas de Δ.

Enfin, en choisissant

$$- \sum_{a \text{ arête de } \Delta} \int_{a^*} \omega \quad [a]$$

comme représentant de C_ω, et

$$\sum_{a \text{ arête de } \Delta} \int_{a} \omega' \quad [a^*]$$

comme représentant de $C_{\omega'}$, on obtient

$$C_\omega \bullet C_{\omega'} = - \sum_{a \text{ arête de } \Delta} \int_{a^*} \omega_f \int_a \overline{\omega_g}$$

car si a et b sont deux arêtes de Δ, on a

$$[a] \bullet [b^*] = \begin{cases} +1 & \text{si } a = b \\ 0 & \text{si } a \neq b \end{cases}$$

par construction du complexe dual et par définition du produit d'intersection (cf. [PG78])

$$= \iint_X \omega \wedge \omega' \qquad \text{d'après la formule (5),}$$

ce qui termine la preuve du lemme.

Bibliographie

[Iwa97] H. Iwaniec, *Topic in Classical Automorphic Forms.* American Mathematical Society, 1997.

[KZ84] W. Kohnen, D. Zagier, *Modular forms with rational periods.* Modular Forms (Robert A. Rankin, ed.), Ellis Horwood Limited, 1984.

[Lan82] S. Lang, *Introduction to Algebraic and Abelian Functions (Second edition).* Springer Verlag, 1982.

[Lan90] S. Lang, *Cyclotomic Fields I and II (Combined Second Edition).* Springer Verlag, 1990.

[Mer] L. Merel, *Sur la nature non-cyclotomique des points d'ordre fini des courbes elliptiques.*

[Mer96] L. Merel, *Bornes pour la torsion des courbes elliptiques sur les corps de nombres.* Invent. Math. **124** (1996).

[Ogg69] A. Ogg, *Modular Forms and Dirichlet Series.* W. A. Benjamin, Inc, 1969.

[PG78] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry.* Wiley-Interscience, 1978.

[Ser70] J-P. Serre, *Cours d'Arithmétique.* PUF, 1970.

Lionel Fourquaux
École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 Paris Cedex 05
France
E-mail : `lionel.fourquaux@ens.fr`