Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **14** (2002), 345–349

Corrigendum à “Classes logarithmiques signées des corps de nombres”

par Jean-François JAULENT

Résumé. Nous corrigeons une erreur contenue dans un article précédent où sont données deux définitions prétendument équivalentes du 2-groupe des classes logarithmiques signées d'un corps de nombres.

Abstract. We correct the inequivalent definitions of signed logarithmic 2-class group for number fields which was given in a previous article.

Introduction

La notion de classes logarithmiques signées pour les corps de nombres a été introduite dans [J2] par analogie avec celle de classes d'idéaux prises au sens restreint et en cohérence avec une construction semblable pour les corps de fonctions (cf. [AJ]). Dans le cas des idéaux, les classes au sens restreint peuvent s'appréhender de deux façons :

- en considérant le sous-groupe Pr_K^+ du groupe des idéaux Id_K formé des idéaux principaux engendrés par les éléments totalement positifs ; puis en définissant le groupe des classes au sens restreint par : $Cl_K^{res} = Id_K/Pr_K^+$;
- en considérant le groupe des diviseurs $D_K \simeq Id_K \oplus Sg_K$ (où $Sg_K \simeq \mathbb{F}_2^r$ est le groupe des signatures de K) et en quotientant par le sous-groupe principal P_K ; ce qui redonne : $Cl_K^{res} = D_K/P_K$.

Dans le cadre logarithmique, en revanche, les deux procédés ne sont pas toujours équivalents (contrairement à ce qui est affirmé implicitement dans [J2]) et conduisent parfois à des groupes distincts (ils diffèrent en fait d'un indice 1 ou 2). Pour remédier à cette discordance, il suffit cependant de restreindre dans la première description le numérateur aux seuls diviseurs *globalement positifs*, ce qui suppose naturellement d'avoir préalablement bien défini cette notion.

Le but de la présente note est ainsi de rectifier la présentation inexacte de [J2] (la Définition-Proposition 9), qui repose sur une définition ambigüe (la Définition 7) et un lemme erroné (le Lemme 8) conduisant à des erreurs ou

Manuscrit reçu le 15 juin 2001.

des confusions. Cela ne remet pas substantiellement en cause les résultats de [J2], qui restent essentiellement valides, en particulier la formule des classes centrales qui n'utilise que la seconde description, mais implique de corriger d'un facteur égal à 1 ou 2 la formule des classes ambiges qui repose sur la première approche.

1. Rappel des principales notations

Nous reprenons ici les notations de [J2], à l'exception de $\widetilde{\mathcal{J}}_K^+$, raccourci malheureux pour $\widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+}$ qui est à l'origine des confusions évoquées.

Rappelons qu'à chaque place finie $\mathfrak{p}$ d'un corps de nombres K est associée une valeur absolue 2-adique $|\ .\ |_\mathfrak{p}$ définie sur le compactifié $\mathcal{R}_\mathfrak{p} = \varprojlim K_\mathfrak{p}^\times / K_\mathfrak{p}^{\times 2^n}$ et à valeurs dans $\mathbb{Z}_2^\times \simeq \{\pm 1\}(1+4\mathbb{Z}_2)$; ce qui permet, en considérant séparément les deux composantes $\{\pm 1\}$ et $1+4\mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$, de définir une fonction signe $\mathrm{sg}_\mathfrak{p}(.)$ à valeurs dans $\{\pm 1\}$ et une valuation logarithmique $\widetilde{v}_\mathfrak{p}(.)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}_2$. Le noyau $\mathcal{R}_\mathfrak{p}^+$ de $\mathrm{sg}_\mathfrak{p}$ est ainsi le sous-groupe *positif* de $\mathcal{R}_\mathfrak{p}$; celui $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}$ de $\widetilde{v}_\mathfrak{p}$ est le groupe des *unités logarithmiques* et l'intersection $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+$ est le groupe des *unités logarithmiques positives.* Aux places à l'infini, on a $\mathcal{R}_\mathfrak{p} = 1$ si $\mathfrak{p}$ est complexe ; $\mathcal{R}_\mathfrak{p} = \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p} = \{\pm 1\}$ si $\mathfrak{p}$ est réelle et, bien sr, $\mathcal{R}_\mathfrak{p}^+ = 1$.

Lorsque le quotient $\mathcal{R}_\mathfrak{p}/\mathcal{R}_\mathfrak{p}^+$ est d'ordre 2, on dit que la place $\mathfrak{p}$ est *signée* ; quand le quotient $\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}/\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+$ est d'ordre 2, elle est dite *logarithmiquement signée.* Cette dernière éventualité se produit exclusivement aux places réelles et à certaines places 2-adiques. En particulier, lorsque le groupe $Sg\ell_K = \oplus_\mathfrak{p}\ \widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}/\widetilde{\mathcal{U}}_\mathfrak{p}^+$ des signatures logarithmiques n'est pas trivial, le corps K lui-même est dit *logarithmiquement signé.*

La Définition 7 et le Lemme 8 de [J2] doivent alors être rectifiés comme suit :

Définition 7. Dans un corps logarithmiquement signé K, nous disons qu'un idèle de degré nul $(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \widetilde{\mathcal{J}}_K$ est :

(i) *globalement positif,* lorsqu'il satisfait la formule du produit pour les fonctions signes $\mathrm{sg}_\mathfrak{p}$. Le groupe des idèles globalement positifs est ainsi :

$$\widetilde{\mathcal{J}}_K^* = \{(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \widetilde{\mathcal{J}}_K \mid \textstyle\prod_\mathfrak{p} \mathrm{sg}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) \ = +1\} = \{(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \mathcal{J}_K \mid \prod_\mathfrak{p} |\ x_\mathfrak{p}\ |_\mathfrak{p}\ = 1\}.$$

Son sous-groupe unité (au sens logarithmique) est de même :

$$\widetilde{\mathcal{U}}_K^* = \widetilde{\mathcal{U}}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^* = \{(u_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \widetilde{\mathcal{U}}_K \mid \textstyle\prod_\mathfrak{p} \mathrm{sg}_\mathfrak{p}(u_\mathfrak{p}) \ = +1\}.$$

(ii) *logarithmiquement positif,* lorsqu'il est d'image triviale dans le groupe des signatures $Sg\ell_K$. Le groupe des idèles logarithmiquement positifs est ainsi :

$$\widetilde{\mathcal{J}}_K^+ = \{(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \widetilde{\mathcal{J}}_K \mid \ \mathrm{sg}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = +1 \ \ \forall \mathfrak{p} \in PLS_K\}.$$

Son sous-groupe unité (au sens logarithmique) est de même :

$$\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ = \widetilde{\mathcal{U}}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^+ = \{(u_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \widetilde{\mathcal{U}}_K \mid \operatorname{sg}_\mathfrak{p}(u_\mathfrak{p}) = +1 \quad \forall \mathfrak{p} \in PLS_K\}.$$

(iii) *totalement positif*, lorsqu'il l'est globalement et logarithmiquement. Le sous-groupe des idèles totalement positifs est ainsi :

$$\widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+} = \widetilde{\mathcal{J}}_K^* \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^+ = \{(x_\mathfrak{p})_\mathfrak{p} \in \widetilde{\mathcal{J}}_K^* \mid \operatorname{sg}_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p}) = +1 \quad \forall \mathfrak{p} \in PLS_K\}.$$

En particulier, le groupe des éléments globaux totalement positifs est le noyau $\mathcal{R}_K^+ = \mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^+$ *dans* $\mathcal{R}_K$ *du morphisme signature* sgl_K *à valeurs dans* $Sg\ell_K$.

Remarque. On a bien $\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ \subset \widetilde{\mathcal{U}}_K^*$ et $\mathcal{R}_K \subset \widetilde{\mathcal{J}}_K^*$ mais non $\widetilde{\mathcal{J}}_K^+ \subset \widetilde{\mathcal{J}}_K^*$, le quotient $\widetilde{\mathcal{J}}_K^+/\widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+} \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K/\widetilde{\mathcal{J}}_K^* \simeq \operatorname{Gal}(K^c[i]/K^c)$ étant d'ordre 1 ou 2.

Nota. Dans la correspondance du corps de classes, $\widetilde{\mathcal{J}}_K$ est le groupe de normes attaché à la $\mathbb{Z}_2$-extension cyclotomique globale K^c ; tandis que son sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K$ correspond à la 2-extension abélienne localement cyclotomique maximale K^{lc}. De façon semblable, $\widetilde{\mathcal{J}}_K^*$ correspond à la 2-extension cyclotomique $K^c[i]$ et le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_K^*\mathcal{R}_K = \widetilde{\mathcal{U}}_K\mathcal{R}_K \cap \widetilde{\mathcal{J}}_K^*$ à l'extension composée $K^{lc}[i]$.

Lemme 8. *On a l'identité* $\widetilde{\mathcal{J}}_K^* = \widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+}\mathcal{R}_K$, *d'où l'isomorphisme entre quotients :*

$$\widetilde{\mathcal{J}}_K^*/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+\mathcal{R}_K \;\simeq\; \widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+}/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+\mathcal{R}_K^+.$$

2. Définition des 2-groupes de classes

Revenons maintenant sur la définition des groupes de classes signées :

Définition & Proposition 9. *Soit* K *un corps de nombres quelconque.*

(i) *Nous appelons 2-groupe des classes logarithmiques signées le quotient* $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K^*/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+\mathcal{R}_K \simeq \widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+}/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+\mathcal{R}_K^+$.

(ii) *En termes de diviseurs, le groupe* $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K$ *s'identifie d'une part au quotient* $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K \simeq \widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K/\widetilde{\mathcal{P}\ell s}_K$ *du 2-groupe des diviseurs logarithmiques signés de degré nul* $\widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K^*/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+$ *par son sous-groupe principal* $\widetilde{\mathcal{P}\ell s}_K = \mathcal{R}_K\widetilde{\mathcal{U}}_K^+/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+$ *; et d'autre part au quotient* $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K \simeq \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^*/\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^+$ *du 2-groupe des diviseurs logarithmiques globalement positifs* $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^* = \widetilde{\mathcal{J}}_K^{*+}/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+$ *de degré nul par son sous-groupe principal totalement positif* $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^+ = \mathcal{R}_K^+\widetilde{\mathcal{U}}_K^+/\widetilde{\mathcal{U}}_K^+$.

(iii) *Et la théorie 2-adique du corps de classes interprète le groupe de classes logarithmiques signées comme groupe de Galois relatif*

$$\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K \simeq \operatorname{Gal}(K^{lcs}/K^{cs})$$

de la plus grande pro-2-extension abélienne K^{lcs} *du corps* K *qui est complètement décomposée sur* $K^{cs} = K^c[i]$ *en chacune de ses places.*

Preuve. Les isomorphismes énoncés résultent directement du Lemme 8. Cela étant, comme expliqué dans [J2], le groupe $\widetilde{\mathcal{J}}_K^*$ fixe K^{cs} ; et le sous-groupe $\widetilde{\mathcal{U}}_K^+\mathcal{R}_K$ fixe K^{lcs}. D'où les interprétations annoncées.

Remarques. Contrairement à [J2], nous n'avons pas fait d'hypothèse sur la signature logarithmique du corps K ; plus précisément :

(i) Pour $i \in K^c$, on a banalement $\widetilde{\mathcal{J}}_K^* = \widetilde{\mathcal{J}}_K$ et $\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ = \widetilde{\mathcal{U}}_K$, d'où l'identité :
$$\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K = \widetilde{\mathcal{C}\ell}_K \ ;$$
et la notion de signe n'apporte rien par rapport à la construction de [J1].

(ii) Pour $i \in K^{lc} \setminus K^c$, en revanche, on a $(\widetilde{\mathcal{J}}_K : \widetilde{\mathcal{J}}_K^*) = 2$ et $\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ = \widetilde{\mathcal{U}}_K$, de sorte que $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K$ est alors d'indice 2 dans $\widetilde{\mathcal{C}\ell}_K$, lequel est donc non trivial ici.

(iii) Pour $i \notin K^{lc}$, enfin (c'est à dire pour K logarithmiquement signé), on a $(\widetilde{\mathcal{J}}_K : \widetilde{\mathcal{J}}_K^*) = 2$ mais $\widetilde{\mathcal{U}}_K^+ \neq \widetilde{\mathcal{U}}_K$ donc$\widetilde{\mathcal{J}}_K = \widetilde{\mathcal{J}}_K^*\widetilde{\mathcal{U}}_K$; d'où la suite exacte courte :
$$1 \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}g\ell}_K \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}\ell s}_K \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K \longrightarrow 1,$$
conformément au Corollaire 10 de [J2].

En fin de compte, la correction apportée concerne exclusivement la description de $\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K$ comme groupe des classes de diviseurs logarithmiques modulo le sous-groupe principal $\widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^+$ construit sur les éléments totalement positifs, description dans laquelle le numérateur doit être restreint au sous-groupe $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^*$ d'indice 1 ou 2 dans $\widetilde{\mathcal{D}\ell}_K$ formé des diviseurs de degré nul globalement positifs.

3. Correction des énoncés de [J2]

Ceci concerne exclusivement la section 3 de [J2] où est établie une formule de points fixes pour les 2-groupes de classes logarithmiques signées dans une extension cyclique L/K, qui prend appui sur leur description comme groupe de classes de diviseurs globalement positifs. Sous l'hypothèse de primitivité forte $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^*) = 0$, son point de départ est maintenant le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{P}\ell}_K^+ & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^* & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{pl}^+_{L/K}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{dl}^*_{L/K}} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{cls}_{L/K}} & & & & \\
0 & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^{+G} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{*G} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L^G & \longrightarrow & H^1(G, \widetilde{\mathcal{P}\ell}_L^+) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Il faut donc remplacer l'indice $(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^G : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K)$ du Lemme 12 par le nouvel indice $(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{*G} : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^*)$. Il vient ainsi :

Lemme 12. *Sous la condition de primitivité forte* $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^*) = 0$, *on a*

$$(\widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{*G} : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_K^*) = (\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K))/[L^{cs} : K^{cs}],$$

où $\widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)$ *désigne l'indice de ramification logarithmique de* $\mathfrak{p}$ *dans* L/K.

D'autre part, puisqu'il existe des idèles principaux de toutes signatures logarithmiques, le Lemme 15 doit être corrigé comme suit :

Lemme 15. *On a l'égalité :*

$$\frac{|H^1(G, \mathcal{R}_L^+)|}{(\mathcal{R}_L^{+G} : \mathcal{R}_K^+)} \;=\; \frac{|Sg\ell_L^G|}{|Sg\ell_K|} \;=\; 2^{-|PLD^2_{L/K}|},$$

où $PLD^2_{L/K}$ *désigne l'ensemble des places 2-adiques de* K *qui se dessignent* (*i.e. qui perdent leur signe logarithmique*) *dans l'extension* L/K.

En fin de compte, le théorème fondamental de cette section s'écrit :

Théorème 17. *Dans une 2-extension cyclique* L/K *de corps de nombres logarithmiquement signés, le nombre de 2-classes logarithmiques signées invariantes par* $G = \mathrm{Gal}(L/K)$ *est donné, sous la condition de primitivité forte* $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^*) = 0$, *par la formule :*

$$|\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_L^G| = \frac{|\widetilde{\mathcal{C}\ell s}_K|}{2^{|PLD^2_{L/K}|}} \;\; \frac{\prod_{\mathfrak{p}} \widetilde{e}_{\mathfrak{p}}(L/K)}{[L^{cs} : K^{cs}] \; (\widetilde{\mathcal{E}}_K^+ : \widetilde{\mathcal{E}}_K^+ \cap N_{L/K}(\mathcal{R}_L^+))}\,.$$

On retrouve donc par là l'expression du nombre de genres logarithmiques signés obtenue plus loin en toute généralité (Corollaire 21). Et la condition de primitivité forte $H^1(G, \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^*) = 0$, qui s'écrit encore $(\mathcal{D}\ell_L^{I_G} : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{*\,I_G}) = 1$, contient bien la condition de primitivité (faible) $(\mathcal{D}\ell_L^{I_G} : \widetilde{\mathcal{D}\ell}_L^{I_G}) = 1$ introduite dans [J1].

Bibliographie

[AJ] B. Anglès, J.-F. Jaulent, *Théorie des genres des corps globaux.* Manuscripta Math. **101** (2000), 513–532.

[J1] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres.* J. Théor. Nombres Bordeaux **6** (1994), 301–325.

[J2] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques signées des corps de nombres.* J. Théor. Nombres Bordeaux **12** (2000), 455–474.

Jean-François Jaulent
Institut de Mathématiques
Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence Cedex, France
E-mail : jaulent@math.u-bordeaux.fr