Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 249–266

Conjecture de Littlewood et récurrences linéaires

par Bernard de MATHAN

Résumé. Ce travail est essentiellement consacré à la construction d'exemples effectifs de couples (α, β) de nombres réels à constantes de Markov finies, tels que 1, α et β soient $\mathbf{Z}$-linéairement indépendants, et satisfaisant à la conjecture de Littlewood.

Abstract. This work is essentially devoted to construct effective examples of pairs of continued fractions (α, β) with bounded quotients, such that 1, α, and β are $\mathbf{Z}$-linearly independent, and satisfying Littlewood's conjecture.

1. Introduction

La conjecture de Littlewood, en approximation diophantienne simultanée, affirme que pour tout couple (α, β) de nombre réels, et tout $\epsilon > 0$, il existe des entiers $q > 0$, r, et s, tels que

$$q|q\alpha - r||q\beta - s| \leq \epsilon. \tag{1}$$

Notant, pour $x \in \mathbb{R}$, $\|x\| = \min\{|x-n|; n \in \mathbf{Z}\}$, cet énoncé équivaut donc à

$$\inf_{q>0} q\|q\alpha\|\|q\beta\| = 0. \tag{1'}$$

Remarquons que la conjecture est trivialement vérifiée si l'un des deux nombres est à constante de Markov infinie, i. e. si

$$\inf_{q>0} q\|q\alpha\| = 0$$

ou

$$\inf_{q>0} q\|q\beta\| = 0.$$

La conjecture est aussi triviale lorsqu'il y a une relation de dépendance linéaire sur $\mathbf{Z}$ entre $1, \alpha$ et β, puisque le théorème de Dirichlet montre qu'il existe alors une infinité d'entiers $q > 0$ pour lesquels $|q|^2\|q\alpha\|\|q\beta\| \ll 1$.

Peu de choses sont connues sur ce problème. Le seul exemple naturel est celui de deux nombres réels appartenant à un même corps cubique,

Manuscrit reçu le 29 novembre 2001.

cf. [2] et [3], et précisément, on ignore si les nombres réels cubiques ne rentrent pas dans le cas des nombres à constante de Markov infinie. On ne connaissait jusqu'à présent aucun exemple de couple de nombres réels (α, β) à constantes de Markov finies, et tels que $1, \alpha, \beta$ soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Z}$, vérifiant la conjecture. L'existence de tels couples est cependant assurée par un résultat de Pollington et Velani, qui démontrent dans [4] que pour tout α à constante de Markov finie, il existe une infinité non dénombrable de nombres réels β à constante de Markov finie tels que le couple (α, β) satisfasse la conjecture.

Nous montrons comment des méthodes de récurrence linéaire permettent d'obtenir des exemples, et notamment nous construisons des exemples effectifs de couples de nombres réels (α, β) à constantes de Markov finies et tels que $1, \alpha, \beta$ soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Z}$, vérifiant la conjecture. En particulier, nous donnons des développements en fractions continues à quotients partiels bornés de nombres α non quadratiques, tels que le couple $(\alpha, 1/\alpha)$ satisfasse la conjecture. En fait de tels exemples se trouvent déjà dans [5], où Martine Queffélec donne des exemples naturels de nombres bien approchables par des nombres quadratiques. Or c'est une simple remarque que pour un tel nombre α, le couple $(\alpha, 1/\alpha)$ satisfait à la conjecture de Littlewood.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\{x\}$ le nombre réel tel que $x - \{x\} \in \mathbf{Z}$, et $-1/2 \leq \{x\} < 1/2$ (donc $\|x\| = |\{x\}|$).

2.

Soit α un nombre réel irrationnel à quotients partiels bornés, et soit (q_n) la suite des dénominateurs des réduites de son développement en fraction continue. La suite (q_n) vérifie donc une relation de récurrence $q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$, où les a_n sont des entiers positifs bornés ($q_{-1} = 0$, $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ etc., les a_n sont les quotients partiels de α). Puisque la suite (p_n) des numérateurs des réduites de α satisfait la même relation de récurrence, les nombres $\alpha_n = q_n\alpha - p_n$ satisfont encore la relation $\alpha_n = a_n\alpha_{n-1} + \alpha_{n-2}$, et comme $|q_n\alpha - p_n| < 1/q_{n+1} \leq 1/2$ pour $n \geq 1$, on a $\alpha_n = \{q_n\alpha\}$ pour $n \geq 1$. Soit β un nombre réel, posons $\beta_n = \{q_n\beta\}$. Comme $\beta_n \equiv a_n\beta_{n-1} + \beta_{n-2} \bmod \mathbf{Z}$, posant pour $n \geq 2$, $\delta_n = \beta_n - a_n\beta_{n-1} - \beta_{n-2}$, on définit donc ainsi une suite d'entiers bornée, puisque $|\delta_n| < 1 + \frac{1}{2}\max a_n$. Dans ce paragraphe, nous allons étudier les propriétés d'approximation simultanée de α et β à l'aide des suites (a_n) et (δ_n). Mais pour pouvoir assurer que l'on construit effectivement des exemples, il est nécessaire d'avoir un résultat affirmant que certaines suites d'entiers bornés (δ_n), données *a priori*, correspondent bien à un nombre réel β. C'est pourquoi nous établissons le résultat préliminaire suivant :

Proposition 2.1. *Soit α un nombre irrationnel à quotients partiels bornés, soient (a_n) et (q_n) respectivement les suites des quotients partiels et des dénominateurs des réduites de α. Supposons $a_n \geq 2$ pour tout $n \geq 2$. Soit $(\delta_n)_{n\geq 2}$ une suite de nombres entiers tels que $|\delta_n| \leq \frac{a_n}{2} - 1$. Il existe un nombre réel β tel que l'on ait $\{q_n\beta\} - a_n\{q_{n-1}\beta\} - \{q_{n-2}\beta\} = \delta_n$ pour tout $n \geq 2$.*

Preuve. La notation $E(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$, désigne l'entier $E(x) = x - \{x\}$, i. e., l'entier tel que $E(x) - 1/2 \leq x < E(x) + 1/2$. Comme $\{q_n\beta\} + E(q_n\beta) = q_n\beta$, la relation demandée équivaut à

$$E(q_n\beta) - a_n E(q_{n-1}\beta) - E(q_{n-2}\beta) = -\delta_n$$

pour tout $n \geq 2$. Nous allons déterminer une constante réelle $0 < c < 1/2$ pour laquelle nous pourrons construire une suite d'entiers $(E_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$E_n - a_n E_{n-1} - E_{n-2} = -\delta_n \tag{2}$$

pour tout $n \geq 2$, et que, posant $I_0 =]-1/2, 1/2[$, et pour $n \geq 1$, $I_n = [(E_n - c)/q_n, (E_n + c)/q_n]$, on ait $I_{n+1} \subset I_n$, pour tout $n \geq 0$. L'intersection des I_n sera alors un point $\beta \in]-1/2, 1/2[$, pour lequel on aura $E(q_n\beta) = E_n$ pour tout $n \geq 0$ (avec $E_0 = 0$), puisque $E_n - 1/2 < q_n\beta < E_n + 1/2$. La suite $\{q_n\beta\}$ satisfera donc bien la récurrence $\{q_n\beta\} - a_n\{q_{n-1}\beta\} - \{q_{n-2}\beta\} = \delta_n$.

Si on prend $E_1 = E_0 = 0$, la condition $I_1 \subset I_0$ est bien satisfaite. La relation de récurrence (2) détermine les entiers E_n pour tout $n \geq 0$. Supposons pour $n \geq 1$ la relation $I_{k+1} \subset I_k$ établie pour tout $0 \leq k < n$. Pour avoir $I_{n+1} \subset I_n$, i. e.,

$$[(E_{n+1} - c)/q_{n+1}, (E_{n+1} + c)/q_{n+1}] \subset [(E_n - c)/q_n, (E_n + c)/q_n],$$

il faut et il suffit que

$$-c\left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_{n+1}}\right) \leq \frac{E_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{E_n}{q_n} \leq c\left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_{n+1}}\right)$$

et comme $E_{n+1}/q_{n+1} - E_n/q_n = (a_{n+1}E_n + E_{n-1} - \delta_{n+1})/q_{n+1} - E_n/q_n = (q_{n-1}/q_{n+1})(E_{n-1}/q_{n-1} - E_n/q_n) - \delta_{n+1}/q_{n+1}$, cette condition équivaut à

$$\begin{aligned} -c(q_{n+1} - q_n)/(q_n q_{n-1}) &\leq E_{n-1}/q_{n-1} - E_n/q_n - \delta_{n+1}/q_{n-1} \\ &\leq c(q_{n+1} - q_n)/(q_n q_{n-1}). \end{aligned} \tag{3}$$

Or, par récurrence, nous savons déjà que $-c(1/q_{n-1} - 1/q_n) \leq E_{n-1}/q_{n-1} - E_n/q_n \leq c(1/q_{n-1} - 1/q_n)$, si bien que pour assurer la condition (3), il suffit que $c(q_n - q_{n-1}) \leq c(q_{n+1} - q_n) + q_n\delta_{n+1}$ et $c(q_n - q_{n-1}) \leq c(q_{n+1} - q_n) - q_n\delta_{n+1}$, i. e., $c(q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}) \geq q_n|\delta_{n+1}|$. Comme $q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1} = (a_{n+1} - 2)q_n + 2q_{n-1} > 0$, nous allons donc demander que $c \geq |\delta_{n+1}|/(a_{n+1} - 2 + 2q_{n-1}/q_n)$ pour tout $n \geq 1$. Puisque $q_n/q_{n-1} \leq a_n + 1$, il suffit pour cela que

$$c \geq \frac{|\delta_{n+1}|}{a_{n+1} - 2 + \dfrac{2}{a_n + 1}} \tag{4}$$

et puisque l'ensemble des nombres $|\delta_{n+1}|/(a_{n+1} - 2 + 2/(a_n + 1))$ est fini car les (a_n) et (δ_n) sont bornés, pour pouvoir choisir $0 < c < 1/2$ tel que pour chaque $n \geq 1$, on ait (4), il suffit que $|\delta_{n+1}| \leq (a_{n+1} - 2)/2$. □

Ce résultat n'est certainement pas optimal, il est seulement destiné ici à assurer que l'énoncé suivant n'est pas vide :

Proposition 2.2. *Soit α un nombre réel irrationnel dont la suite (a_n) des quotients partiels soit bornée, et soit (q_n) la suite des dénominateurs de ses réduites. Soit β un nombre réel, posons $\{q_n\beta\} = \beta_n$ et, pour $n \geq 2$, $\beta_n - a_n\beta_{n-1} - \beta_{n-2} = \delta_n$. Supposons qu'il existe des suites d'entiers positifs $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(n_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ $(i = 0, 1)$, avec $n_{0,k} < n_{1,k}$, telles que $a_{n+l_k} = a_n$ et $\delta_{n+l_k} = \delta_n$ pour $n_{0,k} + 1 \leq n \leq n_{1,k} + 1$. Alors, si*

$$\lim_{k\to+\infty} (n_{1,k} - n_{0,k} - 2l_k) = +\infty \tag{5}$$

le couple (α, β) satisfait à la conjecture de Littlewood.

Preuve. Comme la suite $\gamma_n = \beta_{n+l_k} - \beta_n$ vérifie la récurrence $\gamma_n = a_n\gamma_{n-1} + \gamma_{n-2}$ pour $n_{0,k} + 1 \leq n \leq n_{1,k} + 1$, on a $\gamma_n = A_k q_n + B_k \alpha_n$ pour tout $n_{0,k} - 1 \leq n \leq n_{1,k} + 1$, où A_k et B_k sont des constantes réelles ne dépendant que de k, et que l'on peut déterminer par cette équation pour deux valeurs consécutives de n . Puisque

$$\begin{vmatrix} q_n & q_{n+1} \\ \alpha_n & \alpha_{n+1} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} q_n & q_{n+1} \\ p_n & p_{n+1} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}$$

(les p_n étant les numérateurs des réduites de α), résolvant pour $n_{0,k} - 1 \leq n \leq n_{1,k}$ le système d'équations

$$\gamma_n = A_k q_n + B_k \alpha_n, \quad \gamma_{n+1} = A_k q_{n+1} + B_k \alpha_{n+1},$$

on obtient

$$A_k = (-1)^{n-1}(\gamma_n \alpha_{n+1} - \gamma_{n+1}\alpha_n), \quad B_k = (-1)^n(\gamma_n q_{n+1} - \gamma_{n+1} q_n).$$

Choisissant $n = n_{0,k} - 1$, comme $|\gamma_n| \leq 1$, on obtient $|B_k| \leq 2q_{n_{0,k}}$, puis, faisant $n = n_{1,k}$, $|A_k| \leq 2|\alpha_{n_{1,k}}|$. Ainsi, pour tout $n_{0,k} - 1 \leq n \leq n_{1,k} + 1$, $|\gamma_n| \leq 2(q_n|\alpha_{n_{1,k}}| + |\alpha_n| q_{n_{0,k}})$. Alors

$(q_{n+l_k} - q_n)\|(q_{n+l_k} - q_n)\alpha\|\|(q_{n+l_k} - q_n)\beta\| < 4q_{n+l_k}|\alpha_n|(q_n|\alpha_{n_{1,k}}| + |\alpha_n| q_{n_{0,k}})$,

et comme $|\alpha_n| < 1/q_n$, on a donc

$$(q_{n+l_k} - q_n)\|(q_{n+l_k} - q_n)\alpha\|\|(q_{n+l_k} - q_n)\beta\| < 4\left(\frac{q_{n+l_k}}{q_{n_{1,k}}} + \frac{q_{n+l_k} q_{n_{0,k}}}{q_n^2}\right) \tag{6}$$

Nous allons montrer qu'en l'appliquant pour des entiers n convenablement choisis, cette inégalité prouve que le couple (α,β) satisfait la conjecture de Littlewood. Pour cela, nous construisons une suite $n_{3,k}$ d'entiers, avec $n_{0,k}\le n_{3,k}\le n_{1,k}$, telle que

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{q_{n_{3,k}+l_k}}{q_{n_{1,k}}}=0 \tag{7}$$

et

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{q_{n_{3,k}+l_k}q_{n_{0,k}}}{q_{n_{3,k}}^2}=0. \tag{8}$$

Pour assurer (7), il suffit que

$$\lim_{k\to+\infty}(n_{1,k}-n_{3,k}-l_k)=+\infty. \tag{9}$$

Pour (8), remarquons d'abord que $q_{n+l_k}=C_kq_n+D_k\alpha_n$ pour tout $n_{0,k}-1\le n\le n_{1,k}+1$, où C_k et D_k sont des constantes réelles. On peut donc écrire $q_{n+l_k}/q_n=C_k+D_k\alpha_n/q_n$, et puisque la suite $|\alpha_n|$ est décroissante et que α_n est de signe $(-1)^n$, on voit que la suite $n\longmapsto q_{n+l_k}/q_n$ est décroissante sur $[n_{0,k}-1,n_{1,k}+1]$ pour les n pairs ou pour les n impairs, selon le signe de D_k. Mais si $a=\max a_n$, on a pour tout $n\ge 0$, $q_n\le q_{n+1}\le(a+1)q_n$, et donc $q_{n+1+l_k}/q_{n+1}\le(a+1)q_{n+l_k}/q_n$. Ainsi pour tout $n_{0,k}\le n\le n_{1,k}$, on a finalement $q_{n+l_k}/q_n\le(a+1)^2q_{n_{0,k}+l_k}/q_{n_{0,k}}$, et on peut écrire $q_{n+l_k}q_{n_{0,k}}/q_n^2\le(a+1)^2q_{n_{0,k}+l_k}/q_n$. La condition (8) sera donc réalisée si $\lim_{k\longrightarrow+\infty}q_{n_{0,k}+l_k}/q_{n_{3,k}}=0$, i. e., si

$$\lim_{k\to+\infty}(n_{3,k}-n_{0,k}-l_k)=+\infty. \tag{10}$$

La possibilité de construire une suite $n_{3,k}$ satisfaisant à la fois (9) et (10) résulte alors de la condition (5). La suite $(n_{3,k})$ ainsi choisie, la suite d'entiers $Q_k=q_{n_{3,k}+l_k}-q_{n_{3,k}}>0$ vérifie $\lim_{k\to+\infty}Q_k\|Q_k\alpha\|\|Q_k\beta\|=0$. Donc le couple (α,β) satisfait à la conjecture de Littlewood. □

On peut aussi remarquer un cas un peu plus particulier :

Proposition 2.3. *Avec les mêmes notations qu'à la proposition 2.2, supposons qu'il existe deux suites d'entiers positifs $(n_{i,k})$ $(i=0,1)$ telles que*

$$\lim_{k\to+\infty}(n_{1,k}-n_{0,k})=+\infty \tag{5'}$$

et $\delta_n=0$ pour tout n tel que $n_{0,k}+1\le n\le n_{1,k}+1$. Alors le couple (α,β) satisfait à la conjecture de Littlewood.

La différence avec la proposition 2.2 est que dans ce cas, il n'est pas nécessaire d'imposer de condition sur les (a_n). En effet, la suite (β_n) satisfait alors la relation de récurrence $\beta_n=a_n\beta_{n-1}+\beta_{n-2}$ pour $n_{0,k}+1\le n\le n_{1,k}+1$, et puisque $|\beta_n|\le 1/2$, on peut alors majorer cette suite de la même façon que la suite (γ_n) dans la démonstration de la proposition 2.2.

On obtient ainsi $|\beta_n| \leq q_n|\alpha_{n_{1,k}}| + |\alpha_n|q_{n_{0,k}} \leq q_n/q_{n_{1,k}} + q_{n_{0,k}}/q_n$, pour $n_{0,k} - 1 \leq n \leq n_{1,k} + 1$, et en prenant $n_{3,k} = [(n_{0,k} + n_{1,k})/2]$, de sorte que

$$\lim_{k\to+\infty}(n_{3,k} - n_{0,k}) = \lim_{k\to+\infty}(n_{1,k} - n_{3,k}) = +\infty$$

on en conclut que $\lim_{k\to+\infty}\beta_{n_{3,k}} = 0$. Ainsi le couple (α,β) satisfait à la conjecture de Littlewood, puisque pour tout n, on a $q_n\|q_n\alpha\|\|q_n\beta\| \leq |\beta_n|$, et donc ici $\lim_{k\longrightarrow+\infty} q_{n_{3,k}}\|q_{n_{3,k}}\alpha\|\|q_{n_{3,k}}\beta\| = 0$.

3.

Si les propositions 2.1, 2.2 et 2.3, permettent de construire pour α donné, à constante de Markov finie, des exemples de nombres β tels que le couple (α,β) vérifie la conjecture de Littlewood, l'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne permet pas de savoir si les nombres β ainsi construits sont à quotients partiels bornés, ou même si 1, α, β sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Z}$. Pour pouvoir construire des exemples de couples (α,β) de nombres réels, tous deux à quotients partiels bornés, satisfaisant la conjecture de Littlewood, et tels que 1, α et β soient $\mathbf{Z}$-linéairement indépendants, nous allons proposer des méthodes différentes. L'utilisation de récurrences linéaires permet de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.1. *Soient α et β des nombres réels irrationnels, de développements en fractions continues*

$$\alpha = [a_0, \dots, a_n, \dots]$$

et

$$\beta = [b_0, \dots, b_n, \dots]$$

à quotients partiels bornés. Soient (p_n/q_n) et (p'_n/q'_n) leurs suites de réduites. On suppose qu'il existe des suites d'entiers $m_k \geq 0$, $n_k \geq 0$, $L_k \geq 2$ et $l_k > 0$, satisfaisant aux conditions :

$$a_{m_k+r+l_k} = a_{m_k+r} = b_{n_k+r} \tag{11}$$

pour $2 \leq r \leq L_k$, et

$$\liminf_{k\to+\infty} \frac{q_{m_k}^2 q_{m_k+l_k}^3 q'_{n_k}}{q_{m_k+L_k}} = 0 \tag{12}$$

Alors le couple de nombres (α,β) satisfait la conjecture de Littlewood.

Preuve. Posons $q_n\alpha - p_n = \alpha_n$ et $q'_n\beta - p'_n = \beta_n$ (cette dernière notation différant donc de celle du précédent paragraphe). La relation $a_{m_k+r+l_k} = a_{m_k+r} = b_{n_k+r}$ pour $2 \leq r \leq L_k$ permet d'écrire

$$q'_{n_k+r} = A_k q_{m_k+r} + B_k q_{m_k+r+l_k} \tag{13}$$

pour tout $0 \leq r \leq L_k$, où A_k et B_k sont des constantes réelles. En effet, la suite (q_{m+1}/q_m) est injective, puisqu'il est bien connu que ces nombres ont les développements en fractions continues : $q_{m+1}/q_m = [a_{m+1}, \ldots, a_1]$, et que le développement en fraction continue d'un nombre rationnel est unique si l'on en fixe le dernier terme. Les deux premières équations dans (13) ($r = 0, 1$) déterminent alors A_k et B_k :

$$A_k = (q'_{n_k} q_{m_k+l_k+1} - q'_{n_k+1} q_{m_k+l_k}) / (q_{m_k} q_{m_k+l_k+1} - q_{m_k+1} q_{m_k+l_k})$$
$$B_k = -(q_{m_k+1} q'_{n_k} - q_{m_k} q'_{n_k+1}) / (q_{m_k} q_{m_k+l_k+1} - q_{m_k+1} q_{m_k+l_k})$$

puis la relation (13) s'étend à $0 \leq r \leq L_k$, grâce à (11), puisque

$$q_m = a_m q_{m-1} + q_{m-2}, \quad q'_m = b_m q'_{m-1} + q'_{m-2}.$$

Posons $\Delta_k = q_{m_k} q_{m_k+l_k+1} - q_{m_k+1} q_{m_k+l_k}$, Δ_k est un entier non nul, et $\Delta_k A_k$ ainsi que $\Delta_k B_k$ sont entiers. On a :

$$|\Delta_k| \leq q_{m_k+1} q_{m_k+l_k+1}, \ |\Delta_k A_k| \leq q'_{n_k+1} q_{m_k+l_k+1}, \ |\Delta_k B_k| \leq q'_{n_k+1} q_{m_k+1}.$$

L'entier non nul $Q_k = \Delta_k q'_{n_k+L_k}$ vérifie donc

$$|Q_k| \leq q_{m_k+1} q_{m_k+l_k+1} q'_{n_k+L_k}.$$

On déduit de (13) que $\|Q_k \alpha\| \leq |\Delta_k A_k| \|q_{m_k+L_k} \alpha\| + |\Delta_k B_k| \|q_{m_k+L_k+l_k} \alpha\|$, et comme $\|q_m \alpha\| < 1/q_{m+1}$, on a donc

$$\|Q_k \alpha\| \leq q'_{n_k+1} (q_{m_k+l_k+1}/q_{m_k+L_k+1} + q_{m_k+1}/q_{m_k+L_k+l_k+1}).$$

Ainsi

$$\|Q_k \alpha\| \leq 2 q'_{n_k+1} q_{m_k+l_k+1}/q_{m_k+L_k+1}.$$

Enfin, comme $\|Q_k \beta\| \leq |\Delta_k| \|q'_{n_k+L_k} \beta\|$, on a

$$\|Q_k \beta\| \leq q_{m_k+1} q_{m_k+l_k+1}/q_{n_k+L_k+1}.$$

On obtient alors

$$|Q_k| \|Q_k \alpha\| \|Q_k \beta\| \leq 2 (q_{m_k+1})^2 (q_{m_k+l_k+1})^3 q'_{n_k+1}/q_{m_k+L_k+1} \tag{14}$$

et la condition (12) montre que $\liminf_{k \to +\infty} |Q_k| \|Q_k \alpha\| \|Q_k \beta\| = 0$. □

Nous ne donnerons pas pour le moment de condition suffisante pour que 1, α et β soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Z}$, car nous allons nous intéresser au cas où α est un nombre quadratique, et il suffit alors que le développement en fraction continue de β ne soit pas ultimement périodique pour pouvoir assurer que β n'est pas un nombre quadratique, donc que 1, α et β sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Z}$. Dans le cas où α est un nombre quadratique, la suite (a_n) est périodique à partir d'un certain rang, et on peut sans perte de généralité supposer $a_{n+l} = a_n$ pour tout $n \geq 0$, où l est un entier positif. En effet, on peut remplacer α par un de ses successeurs dans son développement en fraction continue, puisque, si A et B sont des nombres rationnels, $A \neq 0$, la conjecture est équivalente pour le couple (α, β) et pour le couple $(A\alpha + B, \beta)$. On peut alors énoncer :

Corollaire 3.2. *Soit*

$$\alpha = [a_0, \dots, a_n, \dots]$$

un nombre réel quadratique. On suppose $a_{n+l} = a_n$ *pour tout entier* $n \geq 0$, *où* l *est un entier,* $l > 0$. *Soit*

$$\beta = [b_0, \dots, b_n, \dots]$$

un nombre réel à quotients partiels bornés. On désigne par (q_n) *et* (q'_n) *les suites des dénominateurs des réduites de* α *et* β *respectivement. On suppose qu'il existe des suites d'entiers non négatifs* (n_k) *et* (L_k) *telles que*

$$b_{n_k+r} = a_r$$

pour tout $0 \leq r \leq L_k$, *avec*

$$\liminf_{k \to +\infty} \frac{q'_{n_k}}{q_{L_k}} = 0. \tag{15}$$

Alors le couple (α, β) *satisfait à la conjecture de Littlewood.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème 3.1, avec $m_k = 0$ et $l_k = l$. □

On peut donc construire de proche en proche des suites (n_k) et (L_k) satisfaisant à ces conditions : l'entier n_k étant choisi, on choisit L_k de façon que $q_{L_k} \geq k q'_{n_k}$, puis $n_{k+1} > n_k + L_k$. Il est clair que l'on peut ainsi construire une suite de quotients partiels (b_n) non périodique, et même construire un tel ensemble de suites ayant la puissance du continu. Donnons un exemple plus précis :

Corollaire 3.3. *Soit* α *un nombre quadratique, de développement en fraction continue*

$$\alpha = [a_0, \dots, a_n, \dots].$$

Soit $(s_k)_{k \geq 0}$ *une suite strictement croissante d'entiers non négatifs telle que*

$$\sup_{k > 0} \frac{s_k - 2s_{k-1}}{k} = +\infty. \tag{16}$$

Soit $(\epsilon_k)_{k \geq 0}$ *une suite bornée d'entiers positifs, et soit* β *le nombre réel de développement en fraction continue*

$$\beta = [b_0, \dots, b_n, \dots]$$

où $b_n = a_n$ *si* $n \notin \{s_k;\ k \geq 0\}$ *et* $b_{s_k} = \epsilon_k$. *Alors le couple* (α, β) *vérifie la conjecture de Littlewood.*

Preuve. Le développement en fraction continue de α est ultimement périodique (mais n'est plus supposé ici purement périodique, pour éviter une perte de généralité sur β). Il existe donc des entiers $m_0 \geq 0$ et $l > 0$ tels que $a_{m+l} = a_m$ pour tout $m \geq m_0$. Soit k_0 le plus petit des entiers

$k > 0$ tels que $s_k \geq m_0$. Pour $k \geq k_0$, désignons par m_k l'entier tel que $m_0 \leq m_k < m_0 + l$ et $m_k \equiv s_k \bmod l$. La condition (11) est donc satisfaite avec cette suite m_k, en prenant comme suite n_k la suite $n_k = s_k$ pour $k \geq k_0$, puisque $b_{s_k+r} = a_{s_k+r} = a_{m_k+r} = a_{m_k+r+l}$ pour tout $0 < r < s_{k+1} - s_k$; on prendra $L_k = s_{k+1} - s_k - 1$ et $l_k = l$ pour tout $k \geq k_0$. La suite (m_k) restant bornée, la condition (12) se réduit à $\lim_{k\to+\infty} q'_{s_k}/q_{s_{k+1}-s_k} = 0$. Or, posant

$$c = \max\left(\frac{\max_k \epsilon_k}{\min_{n>0} a_n}, 1\right),$$

une récurrence évidente (sur k, puis sur n) montre que $q'_n = q_n$ pour $n < s_0$ et $q'_n \leq c^k q_n$ pour $s_{k-1} \leq n < s_k$ (le coefficient a_0 n'intervenant pas puisque $q'_0 = q_0 = 1$). Par ailleurs, comme $q_{r+2} \geq 2q_r$, on a, pour $r > s$, $q_r \geq 2^{\frac{r-s-1}{2}} q_s$. Comme $q'_{s_k}/q_{s_{k+1}-s_k} \leq c^{k+1} q_{s_k}/q_{s_{k+1}-s_k}$, on obtient donc, pour k tel que $s_{k+1} - 2s_k > 0$,

$$q'_{s_k}/q_{s_{k+1}-s_k} \leq \sqrt{2} c^{k+1}/2^{\frac{s_{k+1}-2s_k}{2}}. \tag{17}$$

La condition (12) résulte alors de (16). $\square$

Une suite s_k pour laquelle il existe $\gamma > 2$ telle que s_k/γ^k ait une limite finie $\lambda \neq 0$ pour $k \longrightarrow +\infty$ convient, puisqu'alors $s_k - 2s_{k-1} \sim \lambda(\gamma-2)\gamma^{k-1}$. Il est clair que pour un nombre quadratique α donné, on peut construire ainsi une infinité non dénombrable de nombres réels β à quotients partiels bornés, tels que le couple (α, β), vérifie la conjecture de Littlewood. Pour construire explicitement β à quotients partiels bornés, tel que 1, α et β soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Z}$, et que le couple (α, β) satisfasse la conjecture, il suffit de prendre une suite (s_k) satisfaisant (16) et une suite (ϵ_k) constante, $\epsilon_k = b$, où b ne soit pas une valeur prise une infinité de fois par la suite (a_n). Alors β n'est pas un nombre quadratique car la suite (b_n) n'est pas ultimement périodique, et donc β n'appartient pas à $\mathbb{Q}(\alpha)$. Dans le cas d'une suite $s_k \sim \lambda\gamma^k$ ($\lambda \neq 0$, $\gamma > 2$) on peut remarquer que le nombre β ainsi obtenu est transcendant, car en reprenant la démonstration du théorème 3.1, on voit qu'alors $|Q_k| \ll q'_{s_{k+1}} \ll A^{s_{k+1}}$, avec $A > 1$. Or d'après (14), on a ici

$$|Q_k| \|Q_k\alpha\| \|Q_k\beta\| \ll q'_{s_k}/q_{s_{k+1}-s_k}$$

et on tire donc de (17) que pour tout $\epsilon > 0$,

$$|Q_k|^{1+\epsilon} \|Q_k\alpha\| \|Q_k\beta\| \ll c^k A^{\epsilon s_{k+1}}/2^{\frac{s_{k+1}-2s_k}{2}},$$

ce que nous écrivons :

$$|Q_k|^{1+\epsilon} \|Q_k\alpha\| \|Q_k\beta\| \ll c^k/2^{\frac{(1-2\epsilon\log_2 A)s_{k+1}-2s_k}{2}}.$$

Il suffit donc de choisir $\epsilon > 0$ tel que $(1 - 2\epsilon \log_2 A)\gamma > 2$ pour que

$$\lim_{k\to+\infty} |Q_k|^{1+\epsilon} \|Q_k\alpha\| \|Q_k\beta\| = 0.$$

Comme $1, \alpha, \beta$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Z}$, puisque $\beta \notin \mathbb{Q}(\alpha)$, il résulte alors du théorème de Schmidt [6] que β est transcendant.

Nous allons aussi donner des exemples de nombres réels α à constante de Markov finie, non quadratiques, tels que le couple $(\alpha, 1/\alpha)$ satisfasse à la conjecture. Le théorème 3.1 peut s'adapter à ce cas en en modifiant très légèrement la démonstration, mais nous allons préférer une autre méthode, qui conduit à un meilleur résultat.

4. La conjecture duale

Rappelons que la condition $(1')$ est équivalente à la suivante

$$(18) \qquad \inf_{(A,C)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}\setminus\{(0,0)\}} \max(|A|,1)\max(|C|,1)\|A\alpha + C\beta\| = 0$$

(conjecture duale, cf. [2], p. 82, Lemme 5, où est en fait démontrée l'implication $(18) \Rightarrow (1')$, seule utilisée ici).

On dit qu'un nombre réel α est bien approchable par des nombres quadratiques si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un nombre quadratique ξ tel que $|\alpha - \xi| \leq \epsilon(H(\xi))^{-3}$, où $H(\xi)$ est la *hauteur* de ξ, i.e. $H(\xi) = \max(|A|, |B|, |C|)$, A, B, et C étant les coefficients d'un polynôme irréductible sur $\mathbf{Z}$, $AX^2 + BX + C$, tel que $A\xi^2 + B\xi + C = 0$. Puisque $|\xi| \geq \frac{1}{2H(\xi)}$ (sinon on aurait $|C| = |A\xi^2 + B\xi| < 1$), un tel nombre α ne peut être nul, ni d'ailleurs rationnel. On a le résultat très simple suivant :

Lemme 4.1. *Si α est bien approchable par les quadratiques, alors le couple $(\alpha, 1/\alpha)$ satisfait à la conjecture de Littlewood.*

En effet, pour $\epsilon > 0$, si ξ est un nombre quadratique, zéro du polynôme irréductible sur $\mathbf{Z}$, $AX^2 + BX + C$, tel que $\max(|A|, |B|, |C|) = H$ et $|\alpha - \xi| \leq \epsilon H^{-3}$, écrivant $A\xi + B + C/\xi = 0$, on voit que pour $0 < \epsilon \leq \frac{|\alpha|}{2}$, on a $|A\alpha + B + C/\alpha| \leq (1 + 2/\alpha^2)\epsilon H^{-2}$. Ainsi, le couple $(\alpha, 1/\alpha)$ satisfait la conjecture duale, donc la conjecture de Littlewood.

Nous dirons aussi que α est très bien approchable par des nombres quadratiques s'il existe un nombre réel $\nu > 3$ pour lequel il existe une infinité de nombres quadratiques ξ tels que $|\alpha - \xi| \ll (H(\xi))^{-\nu}$. Naturellement, un nombre réel très bien approchable par des quadratiques est aussi bien approchable par des quadratiques. Rappelons qu'un tel nombre est transcendant en raison du théorème de Schmidt (cf. [7], théorème 7H).

La façon la plus simple de construire des nombres non quadratiques et bien approchables par des nombres quadratiques, est de perturber faiblement le développement en fraction continue d'un nombre quadratique. On peut ainsi démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.2. *Soit α un nombre quadratique, de développement en fraction continue*

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_n, \ldots].$$

Soit $(s_k)_{k\geq 0}$ une suite strictement croissante d'entiers non négatifs pour laquelle

$$\sup_{k>0} \frac{s_k - 3s_{k-1}}{k} = +\infty. \tag{19}$$

Soit $(\epsilon_k)_{k\geq 0}$ une suite bornée d'entiers positifs, et soit β le nombre réel de développement en fraction continue

$$\beta = [b_0, \ldots, b_n, \ldots]$$

où $b_n = a_n$ si $n \notin \{s_k;\ k \geq 0\}$ et $b_{s_k} = \epsilon_k$. Alors le couple $(\beta, 1/\beta)$ satisfait à la conjecture de Littlewood.

Preuve. Montrons que β est bien approchable par des nombres quadratiques. Désignons par β_k le nombre $\beta_k = [b_{0,k}, \ldots, b_{n,k}, \ldots]$, où $b_{n,k} = a_n$ si $n \notin \{s_l;\ 0 \leq l \leq k\}$ et $b_{s_l,k} = \epsilon_l$ pour $0 \leq l \leq k$. Désignons par $(p_n/q_n)_{n\geq 0}$ et $(p'_n/q'_n)_{n\geq 0}$ la suite des réduites de α et β respectivement. Puisque les premières réduites de β (jusqu'à $p'_{s_{k+1}-1}/q'_{s_{k+1}-1}$) sont les mêmes que celles de β_k, on a

$$|\beta - \beta_k| \leq 1/{q'}^2_{s_{k+1}-1}.$$

En effet β et β_k appartiennent tous deux à l'intervalle d'extrémités $p'_{s_{k+1}-1}/q'_{s_{k+1}-1}$ et $(p'_{s_{k+1}-1}+p'_{s_{k+1}-2})/(q'_{s_{k+1}-1}+q'_{s_{k+1}-2})$, dont la longueur est inférieure à $1/{q'}^2_{s_{k+1}-1}$. Mais β_k est un nombre quadratique, on peut écrire $\beta_k = [b_0, \ldots, b_{s_k}, \alpha']$, où α' est un successeur de α, donc :

$$\beta_k = \frac{p'_{s_k}\alpha' + p'_{s_k-1}}{q'_{s_k}\alpha' + q'_{s_k-1}},$$

et comme α n'a qu'un nombre fini de successeurs dans son développement en fraction continue, on a donc clairement

$$\beta_k = \frac{A_k\alpha + B_k}{C_k\alpha + D_k}$$

où A_k, B_k, C_k et D_k sont des entiers tels que $|A_kD_k - B_kC_k| = 1$ et $\max(|A_k|, |B_k|, |C_k|, |D_k|) \ll q'_{s_k}$. En résolvant, on a $\alpha = (-D_k\beta_k + B_k)/(C_k\beta_k - A_k)$, et on obtient aussitôt que

$$H(\beta_k) \ll {q'}^2_{s_k}.$$

Il suffit donc de s'assurer que

$$\limsup \; q'_{s_{k+1}}/q^3_{s_k} = +\infty. \tag{20}$$

Or, comme précédemment, on a $d^{k+2}q'_{s_{k+1}} \geq q_{s_{k+1}}$, où

$$d = \max\left(\frac{\max_{n>0} a_n}{\min_{s_k>0} \epsilon_k}, 1\right).$$

Par ailleurs il existe $\theta > 1$ tel que $q_n \asymp \theta^n$, et la condition (20) sera donc assurée si $\sup d^{-k}\theta^{s_{k+1}-3s_k} = 0$. Ainsi β est bien approchable par les nombres quadratiques, et donc le couple $(\beta, 1/\beta)$ satisfait à la conjecture de Littlewood. □

Bien entendu, comme ci-dessus, on peut assurer de manière effective que β ne soit pas quadratique en choisissant la suite (ϵ_k) de façon que la suite (b_n) ne soit pas ultimement périodique (par exemple en prenant $\epsilon_k = b$, où b n'est pas une valeur prise une infinité de fois par la suite (a_n)). Si de plus $s_k \sim \lambda\gamma^k$, $\lambda \neq 0$, $\gamma > 3$, on obtient alors un nombre β transcendant, car *très* bien approchable par des quadratiques. En effet, soit $3 < \nu < \gamma$; on a $\sup d^{-k}\theta^{s_{k+1}-\nu s_k} = 0$, puisque $\nu s_k - s_{k+1} \sim \lambda(\nu-\gamma)\gamma^k$, et ainsi $q'_{s_{k+1}} \gg q^{\nu}_{s_k}$.

En fait, on peut aussi démontrer le théorème 4.2 par la méthode de récurrence linéaire du théorème 3.1, mais on obtient un moins bon résultat car on a besoin de la condition (21) : $\sup(s_k - 6s_{k-1})/k = +\infty$, à la place de (19) : $\sup(s_k - 3s_{k-1})/k = +\infty$. A chaque fois, nous avons choisi la méthode donnant le meilleur résultat.

Nous avons aussi cherché à construire un exemple de couple satisfaisant à la conjecture avec des périodes distinctes apparaissant dans les plages de périodicité du développement en fraction continue de chacun des deux nombres :

Théorème 4.3. *Soient α et β des nombres irrationnels, appartenant à un même corps quadratique réel, de développements en fractions continues*

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_n, \ldots]$$

et

$$\beta = [b_0, \ldots, b_n, \ldots].$$

Soient γ et δ des nombres réels irrationnels,

$$\gamma = [c_0, \ldots, c_n, \ldots]$$

et

$$\delta = [d_0, \ldots, d_n, \ldots],$$

à quotients partiels bornés. Soient (p_n/q_n) et (p'_n/q'_n) leurs suites de réduites. On suppose qu'il existe des suites d'entiers $m_k \geq 0$, $n_k \geq 0$, $L_k \geq 0$ et $M_k \geq 0$, telles que

$$c_{m_k+r} = a_r$$

pour $0 \leq r \leq L_k$,

$$d_{n_k+s} = b_s$$

pour $0 \leq s \leq M_k$, *et que*

$$\inf_{(k,l)} \frac{q_{m_k}^3 {q'}_{n_l}^3}{\min(q_{m_k+L_k}, q'_{n_l+M_l})} = 0. \tag{22}$$

Alors le couple (γ, δ) *satisfait à la conjecture de Littlewood.*

Si de plus, il existe des suites $(k(i))$ *et* $(l(i))$ *d'entiers positifs et une constante* N, *telles que pour chaque* $i \in \mathbb{N}$, *il existe des entiers* r_i *et* s_i, *avec* $L_{k(i)} < r_i \leq L_{k(i)} + N$, $M_{l(i)} < s_i \leq M_{l(i)} + N$, *tels que* $c_{m_{k(i)}+r_i} \neq a_{r_i}$ *et* $d_{n_{l(i)}+s_i} \neq b_{s_i}$, *si*

$$\lim_{i \longrightarrow +\infty} \frac{q_{m_{k(i)}+L_{k(i)}}}{q'_{n_{l(i)}+M_{l(i)}}} = 0 \tag{23}$$

et si

$$\liminf \frac{q_{m_{k(i)}}^2 {q'}_{n_{l(i)}}^2}{q_{m_{k(i)}+L_{k(i)}}} = 0 \tag{24}$$

alors, 1, γ *et* δ, *sont* $\mathbf{Z}$*-linéairement indépendants.*

Preuve. Nous établissons la première partie du résultat par le biais de la conjecture duale. Posons

$$\gamma_k = [c_0, \ldots, c_{m_k-1}, \alpha]$$

et

$$\delta_k = [d_0, \ldots, d_{n_k-1}, \beta].$$

Puisque pour tout $0 \leq n \leq m_k + L_k$, p_n/q_n est une réduite commune à γ et γ_k, on a

$$|\gamma - \gamma_k| \leq 1/q_{m_k+L_k}^2 \tag{25}$$

et de même

$$|\delta - \delta_k| \leq 1/q_{n_k+M'}{}_k^2. \tag{26}$$

Les nombres γ_k et δ_k appartiennent au corps $\mathbb{Q}(\alpha)$,

$$\gamma_k = \frac{p_{m_k-1}\alpha + p_{m_k-2}}{q_{m_k-1}\alpha + q_{m_k-2}}$$

et

$$\delta_k = \frac{p'_{n_k-1}\beta + p'_{n_k-2}}{q'_{n_k-1}\beta + q'_{n_k-2}}.$$

On peut donc écrire :

$$\gamma_k = (U_k\alpha + V_k)/W_k \tag{27}$$

$$\delta_k = (X_k\alpha + Y_k)/Z_k \tag{28}$$

où U_k, V_k, W_k, X_k, Y_k, et Z_k, sont des entiers tels que $U_kX_kW_kZ_k \neq 0$, $\max(|U_k|,|V_k|,|W_k|) \ll q_{m_k}^2$ et $\max(|X_k|,|Y_k|,|Z_k|) \ll {q'}_{n_k}^2$. Par élimination de α entre (27) et (28), en dédoublant l'indice k, on obtient donc pour k et l entiers non négatifs une relation de la forme

$$A_{k,l}\gamma_k + B_{k,l}\delta_l + C_{k,l} = 0 \tag{29}$$

où $A_{k,l}$, $B_{k,l}$, et $C_{k,l}$ sont des entiers, $A_{k,l}B_{k,l} \neq 0$, et

$$\max(|A_{k,l}|,|B_{k,l}|,|C_{k,l}|) \ll (q_{m_k}q'_{n_l})^2. \tag{30}$$

Mais (25), (26), et (29), conduisent immédiatement à

$$|A_{k,l}\gamma + B_{k,l}\delta + C_{k,l}| \ll (q_{m_k}q'_{n_l})^2/\min(q_{m_k+L_k}^2, q_{n_l+{N'}_l^2}). \tag{31}$$

La condition (22) montre alors que le couple (γ,δ) satisfait à la conjecture duale (18).

Montrons maintenant la deuxième partie. Supposons que $A\gamma + B\delta + C = 0$, où A, B, et C sont des entiers non tous nuls. Les nombres γ et δ étant irrationnels, A et B sont non nuls. Éliminons γ entre la relation $A\gamma + B\delta + C = 0$ et (31), appliquée au couple $(k(i), l(i))$: comme (23) assure que $q_{m_{k(i)}+L_{k(i)}} \leq q'_{n_{l(i)}+M_{l(i)}}$ pour i suffisamment grand, on obtient l'inégalité $|D_i\delta + E_i| \ll (q_{m_{k(i)}}q'_{n_{l(i)}})^2/q_{m_{k(i)}+L_{k(i)}}^2$, où $D_i = AB_{k(i),l(i)} - BA_{k(i),l(i)}$ et $E_i = AC_{k(i),l(i)} - CA_{k(i),l(i)}$ sont des entiers tels que $\max(|D_i|,|E_i|) \ll (q_{m_{k(i)}}q'_{n_{l(i)}})^2$. Puisque δ est à quotients partiels bornés, il résulte de (24) que l'on a donc $D_i = E_i = 0$ pour une infinité de i. Cela signifie que les coefficients $(A_{k(i),l(i)}, B_{k(i),l(i)}, C_{k(i),l(i)})$ sont proportionnels aux (A,B,C), et donc (29) devient

$$A\gamma_{k(i)} + B\delta_{l(i)} + C = 0. \tag{29'}$$

Par différence

$$A(\gamma_{k(i)} - \gamma) = -B(\delta_{l(i)} - \delta). \tag{32}$$

Or, la notation $\asymp$ signifiant qu'on a à la fois les encadrements $\ll$ et $\gg$, nous allons montrer que les inégalités (25) et (26) deviennent maintenant

$$|\gamma - \gamma_{k(i)}| \asymp 1/q_{m_{k(i)}+L_{k(i)}}^2 \tag{25'}$$

et

$$|\delta - \delta_{l(i)}| \asymp 1/q_{n_{l(i)}+{M'}_{l(i)}^2}. \tag{26'}$$

En effet, soit r_i l' entier tel que $c_{m_{k(i)}+r} = a_r$ pour $0 \leq r < r_i$ et $c_{m_{k(i)}+r_i} \neq a_{r_i}$. Les conditions de la seconde partie du théorème 4.3 assurent que cet entier existe, et on a $L_{k(i)} < r_i \leq L_{k(i)} + N$. Posons

$$\rho_i = [c_{m_{k(i)}+r_i}, \ldots, c_n, \ldots]$$

en sorte que
$$\gamma = [c_0, \dots, c_{m_{k(i)}+r_i-1}, \rho_i]$$
et
$$\gamma_{k(i)} = [c_0, \dots, c_{m_{k(i)}+r_i-1}, \alpha_i]$$
où α_i est un successeur de α. On a
$$\gamma = \frac{p_{m_{k(i)}+r_i-1}\rho_i + p_{m_{k(i)}+r_i-2}}{q_{m_{k(i)}+r_i-1}\rho_i + q_{m_{k(i)}+r_i-2}}$$
et
$$\gamma_{k(i)} = \frac{p_{m_{k(i)}+r_i-1}\alpha_i + p_{m_{k(i)}+r_i-2}}{q_{m_{k(i)}+r_i-1}\alpha_i + q_{m_{k(i)}+r_i-2}}.$$
Puisque $p_{m_{k(i)}+r_i-1}q_{m_{k(i)}+r_i-2} - q_{m_{k(i)}+r_i-1}p_{m_{k(i)}+r_i-2} = \pm 1$, on a donc
$$|\gamma - \gamma_{k(i)}| \asymp \frac{|\rho_i - \alpha_i|}{q^2_{m_{k(i)}+L_{k(i)}}}.$$
La partie entière de ρ_i est $[\rho_i] = c_{m_{k(i)}+r_i}$, alors que $[\alpha_i] = a_{r_i}$, et donc $[\rho_i] \neq [\alpha_i]$. Comme de plus $\rho_i - [\rho_i] \gg 1$ et $\alpha_i - [\alpha_i] \gg 1$ puisque α et γ sont à quotients partiels bornés, on en conclut que $|\rho_i - \alpha_i| \gg 1$, d'où (25′), et de même (26′). Mais alors, en raison de (23), la relation (32) est incompatible avec (25′) et (26′). □

Exemple. Prenons $\alpha = 1 + \sqrt{2} = [2, 2, \dots, 2, \dots]$ et $\beta = \frac{1+\sqrt{2}}{2} = [1, 4, 1, 4, \dots 1, 4 \dots]$. Soit s_k une suite strictement croissante d'entiers positifs impairs telle que

$$\sup_{k>0} \frac{s_k - 6s_{k-1}}{k} = +\infty. \tag{33}$$

Soient $(c_n)_{n\geq 0}$ et $(d_n)_{n\geq 0}$ les suites ainsi définies : $c_n = 2$ si $n \notin \{s_k; k \in \mathbb{N}\}$ et $c_{s_k} = 1$; $d_n = 1$ si n est pair, $d_n = 4$ si n est impair et n'appartient pas à l'ensemble des valeurs de la suite (s_k), et $d_{s_k} = 5$. Nous allons montrer à l'aide du théorème 4.3 que le couple des deux nombres
$$\gamma = [c_0, \dots, c_n, \dots]$$
et
$$\delta = [d_0, \dots, d_n, \dots],$$
satisfait à la conjecture de Littlewood, et que 1, γ, δ, sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Z}$. En effet, soient (u_n) et (v_n) les suites des dénominateurs des réduites de α et β respectivement. On vérifie aisément que $u_n \asymp v_n \asymp (1+\sqrt{2})^n$. Soient aussi q_n et q'_n respectivement les dénominateurs de réduites de γ et de δ. On a trivialement $q_n \leq u_n$ et, comme dans la démonstration du corollaire 3.3, $u_n \leq 2^k q_n$ pour $s_{k-1} \leq n < s_k$. Nous aurons aussi besoin de l'inégalité :

$$u_n \geq (13/9)^k q_n \tag{34}$$

pour $s_{k-1} \leq n < s_k$, que nous allons montrer par récurrence sur k. Cette inégalité est triviale pour $k = 0$ (on prend $s_{-1} = 0$), et si on suppose (34) pour $s_{k-1} \leq n < s_k$, on établit d'abord que

$$u_{s_k} \geq (5/3)(13/9)^k q_{s_k}. \tag{35}$$

En effet, si $s_0 = 1$, (35) est triviale pour u_{s_0} puisque alors $u_1 = 2 = 2q_1$. Sinon $s_k - 2 \geq s_{k-1}$ et d'après (34), $u_{s_k} = 2u_{s_k-1} + u_{s_k-2} \geq (13/9)^k(2q_{s_k-1} + q_{s_k-2})$. Puis $2q_{s_k-1} + q_{s_k-2} \geq (5/3)q_{s_k}$, parce que $q_{s_k} = q_{s_k-1} + q_{s_k-2}$, et $q_{s_k-1} = 2q_{s_k-2} + q_{s_k-3} \geq 2q_{s_k-2}$, or $(2x+1)/(x+1) \geq 5/3$ pour $x \geq 2$. On a ainsi (35), montrons ensuite que

$$u_{s_k+1} \geq (13/9)^{k+1} q_{s_k+1}. \tag{36}$$

En effet, $u_{s_k+1} = 2u_{s_k} + u_{s_k-1} \geq (13/9)^k((10/3)q_{s_k} + q_{s_k-1})$. Or $q_{s_k+1} = 2q_{s_k} + q_{s_k-1}$, et $(10/3)q_{s_k} + q_{s_k-1} \geq (13/9)(2q_{s_k} + q_{s_k-1})$, parce que $q_{s_k} \geq q_{s_k-1}$, et $((10/3)x+1)/(2x+1) \geq 13/9$ pour $x \geq 1$. Ainsi $(10/3)q_{s_k} + q_{s_k-1} \geq (13/9)q_{s_k+1}$, et on obtient (36). Enfin, comme, pour $s_k < n < s_{k+1}$, on a $u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2}$ et $q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2}$, les inégalités (35) et (36) impliquent alors que $u_n \geq (13/9)^{k+1} q_n$ pour tout $s_k \leq n < s_{k+1}$, et par récurrence, (34) est donc établie pour tout k.

On a trivialement $v_n \leq q'_n$, et comme dans la démonstration du corollaire 3.3, $q'_n \leq (5/4)^{k+1} v_n$ pour $s_k \leq n < s_{k+1}$. On applique alors le théorème 4.3 avec $m_k = n_k = s_k + 1$, $L_k = M_k = s_{k+1} - s_k - 2$ (donc $m_k + L_k = n_k + M_k = s_{k+1} - 1$), et en prenant $k = l$. Les suites $k(i)$ et $l(i)$ sont chacune la suite de tous les entiers positifs, et la valeur de la constante N est $N = 1$. On a $q_{s_{k+1}-1}/q'_{s_{k+1}-1} \ll (9/13)^k$, ainsi la condition (23) est satisfaite, et $\dfrac{q_{m_k}^3 {q'}_{n_l}^3}{\min(q_{m_k+L_k}, q'_{n_l+M_l})} \leq (q_{s_k+1} q'_{s_k+1})^3 / q_{s_{k+1}-1} \ll (5/4)^{3k} 2^k (1+\sqrt{2})^{6s_k - s_{k+1}}$, qui, grâce à (33), assure (22) et (24).

5. Conclusion

Le théorème 4.2 donne un procédé permettant de construire une infinité non dénombrable de nombres réels très bien approchables par des nombres quadratiques. Mais des exemples naturels sont déjà connus. Ainsi Martine Queffélec [5] montre que le nombre réel $\alpha \in]0,1[$ dont le développement en fraction continue a pour suite de quotients partiels, la suite de Thue-Morse sur l'alphabet $\{1,2\}$ (ou sur un alphabet formé de deux entiers positifs) est très bien approchable par les nombres quadratiques. Donc le couple $(\alpha, 1/\alpha)$ vérifie la conjecture de Littlewood. C'est à ma connaissance le premier exemple connu d'un couple "naturel" (α, β) de nombres réels à quotients partiels bornés, tels que 1, α et β soient linéairement indépendants sur $\mathbf{Z}$, vérifiant la conjecture de Littlewood.

D'autres exemples de nombres à quotients partiels bornés très bien approchés par des nombres quadratiques sont donnés dans [1]. Cela mène à de nouveaux exemples de nombres réels α à quotients partiels bornés, non quadratiques, tels que le couple $(\alpha, 1/\alpha)$ satisfasse la conjecture de Littlewood. Nous ne savons pas démontrer qu'il en est ainsi pour tout nombre réel $\alpha \neq 0$. On peut remarquer que si α est un nombre cubique, il n'est pas bien approché par les nombres quadratiques, car si ξ est un nombre quadratique, zéro du polynôme irréductible de $\mathbf{Z}[X]$, AX^2+BX+C, avec $\max(|A|,|B|,|C|)=H$, et si $|\xi-\alpha|\leq 1$, on a $|A\alpha^2+B\alpha+C| \ll H|\xi-\alpha|$. Mais pour chacun des conjugués α_1, α_2 de α (autres que $\alpha=\alpha_0$), on a $|A\alpha_i^2+B\alpha_i+C| \ll H$. Or si D est un entier positif tel que $D\alpha$ soit entier algébrique, $D^3\prod_{i=0}^2 A\alpha_i^2+B\alpha_i+C = D^3 N_{\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}}(\alpha)$ est un entier non nul. Ainsi $\prod_{i=0}^2 |A\alpha_i^2+B\alpha_i+C| \gg 1$. Donc $|\xi-\alpha| \gg 1/H^3$, et α est mal approché par les quadratiques. Cependant, d'après le théorème de Cassels et Swinnerton-Dyer, le couple $(\alpha, 1/\alpha)$ satisfait à la conjecture de Littlewood. Il serait très intéressant de donner un exemple de nombre réel α à constante de Markov finie, mal approchable par des nombres quadratiques, et tel que $(\alpha, 1/\alpha)$ vérifie la conjecture de Littlewood.

Par ailleurs, pour α irrationnel donné, à constante de Markov finie, nous ne savons construire de façon explicite un irrationnel β à constante de Markov finie, tel que le couple (α,β) vérifie non trivialement la conjecture, que pour des éléments α particuliers (par exemple, les quadratiques). Ce serait déjà un progrès intéressant de savoir le faire pour α quelconque (l'existence d'un tel β étant par contre assurée par [4]). Un autre progrès intéressant serait de pouvoir affaiblir la condition (15) du corollaire 3.2 et, par exemple de montrer que si α est un nombre quadratique, si la suite des quotients partiels de β a des plages communes de longueurs non bornées avec celle de α, alors le couple (α,β) satisfait à la conjecture.

Remerciements. L'auteur tient à remercier U. Zannier, pour sa présidence de séance lors de son exposé aux journéees arithmétiques de Lille (2001), et sa question sur les exemples. Le présent texte n'a plus beaucoup de rapports avec l'exposé, mais essaie d'apporter une réponse à la question. L'auteur remercie également Y. Bugeaud pour les nombreuses conversations qu'ils ont eues ensemble sur l'approximation par des nombres quadratiques.

Bibliographie

[1] J.-P. Allouche, J. L. Davison, M. Queffélec, L. Q. Zamboni, *Transcendence of Sturmian or morphic continued fractions*, J. Number Theory **91** (2001), 39–66.

[2] J. W. S. Cassels, H. P. F. Swinnerton-Dyer, *On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms.* Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A, **248** (1955), 73–96.

[3] L. G. Peck, *Simultaneous rational approximations to algebraic numbers.* Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 197–201.

[4] A. D. POLLINGTON, S. L. VELANI, *On a problem in simultaneous Diophantine approximation: Littlewood's conjecture.* Acta Math. **185** (2000), 287–306.
[5] M. QUEFFÉLEC, *Transcendance des fractions continues de Thue-Morse.* J. Number Theory **73** (1998), 201–211.
[6] W. M. SCHMIDT, *On simultaneous approximations of two algebraic numbers by rationals.* Acta Math. **119** (1967), 27–50.
[7] W. M. SCHMIDT, *Approximation to algebraic numbers.* Enseignement math. **17** (1971), 187–253.

Bernard DE MATHAN
Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université Bordeaux 1
351 cours de la Libération
33405 Talence Cedex
France
E-mail : demathan@math.u-bordeaux.fr