Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 411–478

ARI/GARI, la dimorphie et l'arithmétique des multizêtas : un premier bilan

par Jean ECALLE

Résumé. Nous tentons, dans ce Survol, de présenter une structure méconnue : l'algèbre de Lie ARI et son groupe GARI. Puis nous montrons quels progrès elle a déjà permis de réaliser dans l'étude arithmético-algébrique des *valeurs zêta multiples* et aussi quelles possibilités elle ouvre pour l'exploration du phénomène plus général de *dimorphie numérique.*

Abstract. This Survey presents a novel structure : the Lie algebra ARI along with its group GARI. It then goes on to sketch some of the advances which ARI/GARI made possible in the field of MZV (multiple zeta values) arithmetics, and what promises it holds for the investigation of the related, but much broader phenomenon of *numerical dimorphy.*

Table des matires

Manuscrit reçu le 22 mai 2002.

1. Importance et ubiquité des multizêtas

Pour tout r, la fonction zêta multiple *pure* est définie par la série

$$(1) \qquad \zeta(s_1,\ldots,s_r) := \sum_{0<n_r<\cdots<n_1} n_r^{-s_r}\ldots n_1^{-s_1} =: \mathrm{Ze}^{\binom{0\;,\ldots,\;0}{s_1\;,\ldots,\;s_r}}$$

et son analogue *modulé* (sous-entendu : modulé par des racines de l'unité $e_j := \exp(2\pi i\epsilon_j)$) est défini par :

$$(2) \quad \zeta(s_1,\ldots,s_r;e_1,\ldots,e_r) := \sum_{0<n_r<\cdots<n_1} n_r^{-s_r}e_r^{n_r}\ldots n_1^{-s_1}e_1^{n_1} =: \mathrm{Ze}^{\binom{\epsilon_1\;,\ldots,\;\epsilon_r}{s_1\;,\ldots,\;s_r}}$$

Bien que ces séries ne convergent absolument que sur le domaine :

$$(3) \qquad \Re(s_1)>1\ ,\ \Re(s_1+s_2)>2\ ,\ldots,\ \Re(s_1+\cdots+s_r)>r$$

nous verrons que leurs sommes possèdent un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}^r$ tout entier, mais avec des valeurs aux points de $\mathbb{Z}^r$ qui se ramènent toutes, *rationnellement*, aux valeurs prises aux points de $\mathbb{N}^r$. Du point de

vue arithmétique, seules ces dernières – dites *valeurs multizêta* ou *multizêtas* pour faire bref – méritent donc d'être retenues, mais elles le méritent superlativement, du fait de leur rôle :
1) en théorie de la résurgence et des invariants holomorphes (depuis 1975)
2) en théorie des nœuds (depuis 1987)
3) en théorie des nombres (depuis 1985)
4) dans l'étude des diagrammes de Feynman (depuis 1985)
5) en relation avec le groupe de Grothendieck-Teichmüller (depuis 1991)
mais surtout pour ces deux raisons-ci :
(i) dans tout processus naturel de génération des constantes transcendantes (qu'il s'agisse des *périodes* de Kontsevich ou – construction à mon avis plus adéquate – du corps $\mathbb{N}$a des *naturels*, etc) les multizêtas sont parmi les toutes premières constantes à apparaître
(ii) elles sont les plus simples à manifester le fascinant phénomène de la 'dimorphie' ou du 'double produit' . Les plus simples *mais non les seules*, loin de là ! C'est justement par rapport à ce phénomène *méconnu mais si général* de la *dimorphie* [1] que les multizêtas prennent toute leur valeur de paradigme. Et c'est également ce vaste horizon d'applications futures qui, pensons-nous, justifie l'introduction de tout l'appareil algébrico-moulien esquissé ici et développé dans [E5].

2. La fonction zêta de Riemann, modèle et point de départ

Puisque c'est elle qu'il s'agit de généraliser, commençons par nous remémorer ses propriétés les plus saillantes, puis demandons-nous quelles sont celles qui ont des chances raisonnables de survivre à la multiplication des variables. Ces propriétés sont :

P1 : l'existence d'un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ tout entier.

P2 : l'équation de *réflexion*, qui relie $\zeta(s)$ à $\zeta(1-s)$.

P3 : l'équation de *translation*, qui exprime $\zeta(s)$ en fonction des translatées droites $\zeta(s+1)$,$\zeta(s+2)$,...avec des coefficients essentiellement polynômiaux en s. [2]

P4 : la *première factorisation*, en produit eulerien : $\zeta(s) \equiv \prod_{p\in\mathbb{P}} (1-p^{-s})^{-1}$

P5 : la *seconde factorisation*, moins connue et moins utile :

$$\zeta(s) \equiv \prod_{n\in\mathbb{N}^\star} \zeta^{\mathbb{P}}(n.s) \quad avec \quad \zeta^{\mathbb{P}}(s) := \sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-s} \equiv \prod_{n\in\mathbb{N}^\star} (\zeta(n.s))^{\mu(n)}$$

[1] qui semble ne pouvoir être conceptualisé de manière adéquate que dans le cadre des algèbres de *fonctions birésurgentes* avec, pour pendant numérique, la hiérarchie des *anneaux de naturels*, cf [E4],[E5].

[2] C'est d'ailleurs cette équation de translation, plus que l'équation de réflexion, qui mériterait le nom d'*équation fonctionnelle de* $\zeta(.)$.

P6 : l'apparente localisation des zéros de $\zeta(.)$ sur l'axe vertical $\Re(s) = 1/2$, ou *hypothèse de Riemann.*

P7 : la dichotomie entre les entiers s positifs pairs, où $\zeta(s)/\pi^s$ est rationnel, et les entiers positifs impairs, où la nature arithmétique de $\zeta(s)$ et $\zeta(s)/\pi^s$ est mystérieuse (à noter que cette dichotomie se retrouve, mais sensiblement modifiée, du côté négatif).

P8 : la très probable indépendance algébrique de $\zeta(3), \zeta(5), \zeta(7), \ldots$

P9 : le rôle 'complètement à part' de $\zeta(2) = \pi^2/6$.

3. Le passage aux multizêtas : ce qui demeure, ce qui disparaît, ce qui apparaît

Des factorisations P4 et P5, trop liées à l'unidimensionalité, nous devons faire notre deuil. On doit en revanche s'attendre à ce que survive l'*équation de translation* ainsi que sa conséquence directe : l'existence d'un *prolongement méromorphe* avec *lieu singulier* élémentaire et *résidus* remarquables. Nous verrons que tel est bien le cas. Même l'*équation de réflexion*, on le sent bien, n'est pas vouée à disparaître sans trace ; toutefois nous ne nous intéresserons qu'à sa 'restriction' aux points entiers. De l'hypothèse de Riemann, également, quelque chose doit survivre, pas directement à propos des multizêtas (1) ou (2), mais de variantes adaptées.

Mais ce sont évidemment les propriétés arithmétiques qui promettent le plus. De fait, il n'y aura pas ici appauvrissement mais spectaculaire enrichissement, en raison surtout du phénomène de *dimorphie*, complètement absent en dimension 1, mais prépondérant en dimensions supérieures. De quoi s'agit-il au juste ? De l'existence sur les multizêtas d'un *double codage*, par le moule $Ze^\bullet$ et le moule $Wa^\bullet$, et, attachés à ces deux codages, de deux procédés distincts pour la multiplication scalaire, permettant chacun d'exprimer tout produit de deux multizêtas comme combinaison linéaire à coefficients rationnels d'un nombre variable mais fini d'autres multizêtas. De plus, les très abondantes données numériques dont on dispose aujourd'hui suggèrent que ces deux familles de relations – dites *relations quadratiques* – épuisent effectivement toutes les relations possibles. D'où l'idée de travailler non pas sur les *multizêtas numériques*, dont l'élucidation arithmétique complète est encore hors de portée, mais sur les *multizêtas symboliques* ou *formels*, c'est-à-dire les $Ze^\bullet$ et les $Wa^\bullet$, définis modulo les *relations de conversion*, qui permettent de traduire un codage en l'autre, et les *relations quadratiques*, qui définissent, doublement, la structure multiplicative.

4. Principaux objectifs

G1 : Recherche de fonctions génératrices idoines – ce seront $Zig^\bullet$ et $Zag^\bullet$ – permettant d'exprimer d'une manière plus compacte les propriétés (conversion et multiplication) des scalaires $Ze^\bullet$ et $Wa^\bullet$ et surtout de *borner* le nombre de termes figurant dans la linéarisation des produits

G2 : Montrer la *libre génération*, autrement dit établir que les $\mathbb{Q}$-anneaux de multizêtas (purs ou modulés) sont des anneaux de polynômes à une infinité d'indéterminées, les *irréductibles.*

G3 : Enumérer et décrire ces irréductibles et examiner ce qui leur répond du côté des fonctions génératrices.

G4 : Rechercher une base d'irréductibles qui soit *naturelle* et *'impartiale'*, i.e. à égale distance des deux codages duaux $Ze^\bullet$ et $Wa^\bullet$.

G5 : Regarder ce que devient la dichotomie pair/impair et décrire la dépendance en π^2 des multizêtas, ainsi que ce qui lui correspond du côté des fonctions génératrices : ce seront les moules $pal^\bullet/pil^\bullet$ et $tal^\bullet/til^\bullet$.

G6 : Rechercher systématiquement toutes les familles de relations *d'arité finie* entre multizêtas, tant du côté scalaire que du côté des fonctions génératrices.

G7 : Puisque les relations quadratiques sont présumées exhaustives, tenter d'en déduire, par voie algébrique, toutes les autres familles de relations connues à ce jour : involution de Hoffman, relations hexagonales et pentagonales, etc.

G8 : Calcul systématique des dimensions *additives* (dimension du $\mathbb{Q}$-module des multizêtas de poids et de longueur donnés, etc) et *multiplicatives* (nombres d'irréductibles de poids et de longueur donnés, etc)

G9 : Décomposition canonico-explicite des multizêtas en irréductibles – étant entendu qu'il existe des degrés dans l'explicite et qu'il reste parfois une certaine latitude dans la détermination du canonique

5. Deux mots sur les moules, les bimoules et leurs symétries

Abréviations :
Dans toute la suite nous poserons $P(t) := 1/t$; $Q(t) := c/\tan(c\,t)$ et nous abrêgerons comme suit les sommes/différences de nos variables :

$$u_{12} = u_1 + u_2,\ \ u_{123} = u_1 + u_2 + u_3,\ \ \ldots,\ \ v_{1:2} := v_1 - v_2,\ \ etc \tag{4}$$

Moules :
Les moules sont des *fonctions d'un nombre variable de variables* : ils dépendent de séquences $\boldsymbol{\omega} := (\omega_1, \ldots, \omega_r)$ de longueur r quelconque. Ces séquences sont notées en gras, avec indexation supérieure. Le produit des séquences dénote la simple concaténation : e.g. $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^1.\boldsymbol{\omega}^2$. Les éléments

ω_i de ces séquences sont notés en caractères ordinaires, avec indexation inférieure. Les séquences sont à leur tour affixées aux moules en indices supérieurs $A^\bullet = \{A^{\boldsymbol{\omega}}\}$, vu que les moules sont destinés à être contractés :

$$A^\bullet, B_\bullet \mapsto < A^\bullet, B_\bullet > := \sum A^{\boldsymbol{\omega}} B_{\boldsymbol{\omega}}$$

avec des objets duaux (souvent des opérateurs différentiels ou éléments d'une algèbre associative), dits *comoules* : $B_\bullet = \{B_{\boldsymbol{\omega}}\}$, qui portent leurs propres indices en position inférieure.

Principales opérations sur les moules :
Les moules peuvent être *additionnés, multipliés, composés.*
L'addition se fait composante par composante.
La multiplication (*mu* ou $\times$) est associative, mais non-commutative :

$$C^\bullet = \mathrm{mu}(A^\bullet, B^\bullet) = A^\bullet \times B^\bullet \Longleftrightarrow C^{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^1 . \boldsymbol{\omega}^2} A^{\boldsymbol{\omega}^1} B^{\boldsymbol{\omega}^2} \tag{5}$$

(ne pas oublier les deux décompositions triviales $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}.\boldsymbol{\emptyset}$ et $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\emptyset}.\boldsymbol{\omega}$).
Nous aurons aussi, quoique plus rarement, recours à la *composition* des moules, notée $\circ$ et ainsi définie :

$$\begin{aligned} & C^\bullet := A^\bullet \circ B^\bullet \ \ (\ avec \quad B^\emptyset = 0\ ) \quad \Leftrightarrow \\ & C^{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}^1 .. \boldsymbol{\omega}^s\ ;\ \boldsymbol{\omega}^i \neq \emptyset} A^{\|\, \boldsymbol{\omega}^1 \,\|, \dots, \|\, \boldsymbol{\omega}^s \,\|} B^{\boldsymbol{\omega}^1} \dots B^{\boldsymbol{\omega}^s} \end{aligned} \tag{6}$$

Principaux types de symétrie pour les moules :
La plupart des moules utiles présentent des *'symétries'* simples.
Un moule $A^\bullet$ est dit *symétral* (resp. *alternal*) ssi :

$$\sum_{\boldsymbol{\omega} \in \mathrm{sha}(\boldsymbol{\omega}^1, \boldsymbol{\omega}^2)} A^{\boldsymbol{\omega}} = A^{\boldsymbol{\omega}^1} A^{\boldsymbol{\omega}^2} \ \ (resp.\ 0) \qquad \forall \boldsymbol{\omega}^1 \neq \emptyset, \forall \boldsymbol{\omega}^2 \neq \emptyset \tag{7}$$

Un moule $A^\bullet$ est dit *symétrel* (resp. *alternel*) ssi :

$$\sum_{\boldsymbol{\omega} \in \mathrm{she}(\boldsymbol{\omega}^1, \boldsymbol{\omega}^2)} A^{\boldsymbol{\omega}} = A^{\boldsymbol{\omega}^1} A^{\boldsymbol{\omega}^2} \ \ (resp.\ 0) \qquad \forall \boldsymbol{\omega}^1 \neq \emptyset, \forall \boldsymbol{\omega}^2 \neq \emptyset \tag{8}$$

Ici $sha(\boldsymbol{\omega}^1, \boldsymbol{\omega}^2)$ (resp. $she(\boldsymbol{\omega}^1, \boldsymbol{\omega}^2)$) dénote l'ensemble des séquences $\boldsymbol{\omega}$ obtenues à partir de $\boldsymbol{\omega}^1$ et $\boldsymbol{\omega}^2$ par battage simple (resp. contractant). Dans un battage contractant, deux indices adjacents ω_i et ω_j mais provenant l'un de $\boldsymbol{\omega}^1$ et l'autre de $\boldsymbol{\omega}^2$ peuvent se fondre en $\omega_{ij} := \omega_i + \omega_j$.

Les bimoules et les contracteurs :
Les *bimoules* sont des moules qui dépendent d'une séquence double :

$$A^\bullet = A^{\mathbf{w}} = A^{w_1, \dots, w_r} = A^{\binom{u_1\ ,\ \dots\ ,\ u_r}{v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_r}}$$

et – c'est là l'essentiel – qu'on soumet à diverses opérations, unaires ou binaires, qui mêlent intimement les deux séquences [3], sont de nature 'symplectique' [4] et s'expriment aux moyen de quatre 'contractions' de base (cf infra). L'une de ces opérations unaires est le *swap* :

$$A_*^\bullet = \mathrm{swap}(A^\bullet) \quad \Longleftrightarrow \quad A_*^{\binom{u_1\ ,\ \dots\ ,\ u_r}{v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_r}} = A^{\binom{v_r\ ,\ v_{r-1:r}\ ,\ \dots\ ,\ v_{2:3}\ ,\ v_{1:2}}{u_{1\dots r}\ ,\ u_{1\dots r-1}\ ,\ \dots\ ,\ u_{12}\ ,\ u_1}} \tag{9}$$

Une autre est le *push* :

$$A_*^\bullet = \mathrm{push}(A^\bullet) \quad \Longleftrightarrow \quad A_*^{\binom{u_1\ ,\ \dots\ ,\ u_r}{v_1\ ,\ \dots\ ,\ v_r}} = A^{\binom{-u_{1..r}\ ,\ u_1\ \ u_2\ ,\ \dots\ ,\ u_{r-1}}{-v_r\ ,\ v_{1:r}\ v_{2:r}\ ,\ \dots\ ,\ v_{r-1:r}}} \tag{10}$$

relié au *swap* par :

$$\mathrm{neg}\circ\mathrm{push} := \mathrm{anti}\circ\mathrm{swap}\circ\mathrm{anti}\circ\mathrm{swap} \tag{11}$$

où l'involution *anti* (resp. *neg*) inverse les séquences $\mathbf{w}$ (resp. change le signe de tous leurs éléments $w_i \mapsto -w_i$).

Nous entreverrons dans la suite quelques unes des opérations binaires. Toutes impliquent des *contractions*, denotées par les symboles $\rceil$, $\lceil$, $\rfloor$, $\lfloor$ et toujours relatives à une factorisation dûment spécifiée $\mathbf{w} = \mathbf{w}^1\mathbf{w}^2\dots\mathbf{w}^s$ de la séquence totale. Les quatre règles de contraction sont immédiatement apparentes sur l'exemple qui suit. Relativement à la factorisation :

$$\mathbf{w} = \dots\mathbf{a}.\mathbf{b}\dots = \dots\binom{u_3\ ,\ u_4\ ,\ u_5}{v_3\ ,\ v_4\ ,\ v_5}\binom{u_6\ ,\ u_7\ ,\ u_8\ ,\ u_9}{v_6\ ,\ v_7\ ,\ v_8\ ,\ v_9}\dots$$

les symboles $\rceil$, $\lceil$, $\rfloor$, $\lfloor$ signalent les changements :

$$\mathbf{a}\rceil := \binom{u_3\ ,\ u_4\ ,\ u_{56789}}{v_3\ ,\ v_4\ ,\ \ v_5} \qquad \lceil\mathbf{b} := \binom{u_{3456}\ ,\ u_7\ ,\ u_8\ ,\ u_9}{v_6\ ,\ v_7\ ,\ v_8\ ,\ v_9} \tag{12}$$

$$\mathbf{a}\rfloor := \binom{u_3\ ,\ u_4\ ,\ u_5}{v_{3:6}\ ,\ v_{4:6}\ ,\ v_{5:6}} \qquad \lfloor\mathbf{b} := \binom{u_6\ ,\ u_7\ ,\ u_8\ ,\ u_9}{v_{6:5}\ ,\ v_{7:5}\ ,\ v_{8:5}\ ,\ v_{9:5}} \tag{13}$$

avec les abréviations usuelles pour les sommes/différences.

On voit que le contracteur $\rceil$ *ajoute* à *l'*élément supérieur-droit de $\mathbf{a}$ *tous* les éléments supérieurs de la séquence voisine $\mathbf{b}$, tandis que le contracteur $\rfloor$ *soustrait* de *chaque* élément inférieur de $\mathbf{a}$ *l'* élément inférieur-gauche de la séquence voisine $\mathbf{b}$. Et *vice versa* pour $\lceil$ et $\lfloor$. De fait, les variables $\mathbf{u}$ sont vouées à être additionnées les unes aux autres et les variables $\mathbf{v}$ à être soustraites les unes des autres.

Principaux types de symétrie pour les bimoules :

La définition de *symétral/alternal* est inchangée. Celle de *symétrel/alternel* aussi, avec la contraction additive $w_i + w_j$ affectant simultanément les variables $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Mais il apparaît de nouvelles symétries propres aux bimoules. Ce sont les types *symétril/alternil* (*resp. symétrul/alternul*) qui sont définis

---

[3] sinon ce seraient de banals moules aux indices $w_i = \binom{u_i}{v_i}$ dans $\mathbb{C}^2$ au lieu de $\mathbb{C}$.

[4] i.e. respectent la forme $\sum du_i \wedge dv_i$ et le produit $\sum u_i v_i$

comme *symétral/alternal* mais avec chaque contraction additive $w_i + w_j$ remplacée par :

$$P(v_{i:j})\, A^{\binom{\ldots,\, u_{ij}\,,\ldots}{\ldots,\, v_i\,,\ldots}} + P(v_{j:i}) A^{\binom{\ldots,\, u_{ij}\,,\ldots}{\ldots,\, v_j\,,\ldots}}$$

$$\textit{resp.}\ - P(u_j)\, A^{\binom{\ldots,\, u_{ij}\,,\ldots}{\ldots,\, v_i\,,\ldots}} - P(u_i) A^{\binom{\ldots,\, u_{ij}\,,\ldots}{\ldots,\, v_j\,,\ldots}}$$

Ainsi pour un bimoule *symétral* $A^\bullet$ et deux séquences-facteurs de longueur 1 et 2 nous avons :

$$A^{\binom{u_1}{v_1}} A^{\binom{u_2, u_3}{v_2, v_3}} \equiv A^{\binom{u_1,\, u_2,\, u_3}{v_1,\, v_2,\, v_3}} + A^{\binom{u_2,\, u_1,\, u_3}{v_2,\, v_1,\, v_3}} + A^{\binom{u_2,\, u_3,\, u_1}{v_2,\, v_3,\, v_1}}$$

mais si $A^\bullet$ est *symétrel* (resp. *symétril ou symétrul*) nous devons ajouter au membre de droite des termes contractés, qui valent respectivement :

$$+ A^{\binom{u_{12},\, u_3}{v_{12},\, v_3}} + A^{\binom{u_2,\, u_{13}}{v_2,\, v_{13}}}$$

$$+P(v_{1:2})\, A^{\binom{u_{12},\, u_3}{v_1,\, v_3}} + P(v_{2:1})\, A^{\binom{u_{12},\, u_3}{v_2,\, v_3}} + P(v_{1:3})\, A^{\binom{u_2,\, u_{13}}{v_2,\, v_1}} + P(v_{3:1})\, A^{\binom{u_2,\, u_{13}}{v_2,\, v_3}}$$

$$- P(u_1)\, A^{\binom{u_{12},\, u_3}{v_1,\, v_3}} - P(u_2)\, A^{\binom{u_{12},\, u_3}{v_2,\, v_3}} - P(u_1)\, A^{\binom{u_2,\, u_{13}}{v_2,\, v_1}} - P(u_3)\, A^{\binom{u_2,\, u_{13}}{v_2,\, v_3}}$$

Il y a enfin quatre autres types (*symétriil/alterniil , symétruul/alternuul*) qui sont essentiellement les 'périodisés' des précédents, avec Q à la place de P, mais aussi des termes correctifs en c et des définitions nettement plus complexes.

A chacun des types en *'sym-'* correspond une loi de multiplication commutative (c'est manifeste) mais aussi associative (ce l'est moins).

6. Prolongement méromorphe des multizêtas : aspects arithmétiques

Dans toute la suite, les $\epsilon_j \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dénoteront des rationnels définis modulo 1 et les $e_j := \exp(2\pi i\, \epsilon_j)$ désigneront les racines de l'unité correspondantes. Quant aux s_j, ce seront des entiers > 0, sauf dans cette section, où nous laissons les s_j parcourir tout $\mathbb{C}$.

Au moule $Ze^\bullet$ défini en (2) et manifestement *symétrel*, associons un moule $Zea^\bullet$, très proche mais manifestement *symétral* et surtout mieux adapté à l'étude du prolongement méromorphe :

$$\mathrm{Zea}^{\binom{\epsilon_1\ ,\ldots,\ \epsilon_r}{s_1\ ,\ldots,\ s_r}} := \frac{1}{k_1!k_2!\ldots} \sum_{n_1 \geq \cdots \geq n_r > 0} n_1^{-s_1} e_1^{n_1} \ldots n_r^{-s_r} e_r^{n_r} \tag{14}$$

avec des inégalités larges entre les n_j et un facteur de multiplicité $1/k_1! \ldots$ si la suite $\{n_j\}$ se décompose en paquets de k_1, puis k_2, etc, termes consécutifs égaux. $Zea^\bullet$ se déduit par postcomposition $Zea^\bullet := Ze^\bullet \circ Exp^\bullet$ de $Ze^\bullet$ par le moule élémentaire $Exp^\bullet$ dont les composantes de longueur r valent $1/r!$[5].

[5] la règle de composition (6) conduit ici à contracter simultanément les s_j et les ϵ_j

Pour un r et des ϵ_j fixés, les séries qui définissent $Ze^\bullet$ et $Zea^\bullet$ ne sont absolument convergentes que sur le domaine $\{\Re(s_1) > 1,\ \Re(s_{12}) > 2, \ldots, \Re(s_{1\ldots r}) > r\}$ mais leurs sommes *admettent un prolongement méromorphe sur* $\mathbb{C}^r$ *tout entier et un prolongenent holomorphe uniforme sur* $\mathbb{C}^r - \mathbb{Z}^r$. La démonstration prend une ligne, puisqu'elle tient tout entière dans la banale identité

$$(n \pm 1)^{-s} \equiv \sum_{k \geq 0} (\mp 1)^k \ \frac{\Gamma(s+k)}{\Gamma(s) k!} \ n^{-s-k} \tag{15}$$

qui, injectée dans les séries (1)(2)(14), permet immédiatement d'exprimer tout multizêta en fonction des multizêtas *convergents*, par une formule qui généralise directement l'*équation de translation* de la fonction de zêta classique (cf §2, **P3**).

De plus, on observe une agréable séparation des parties singulière et régulière : *pour tout* $k > 0$ *il y a factorisation des moules multizêta*

$$\mathrm{Ze}^\bullet = \mathrm{Zesing}_k^\bullet \times \mathrm{Zereg}_k^\bullet \tag{16}$$

$$\mathrm{Zea}^\bullet = \mathrm{Zeasing}_k^\bullet \times \mathrm{Zeareg}_k^\bullet \tag{17}$$

avec des facteurs droits holomorphes sur tout le domaine $\{\Re(s_j) > -k\}$ *et des facteurs gauches méromorphes sur ce même domaine et porteurs de singulariés toutes rationnelles.* Par "singularités rationnelles", il faut entendre ici des sommes finies de multipôles de la forme :

$$\sum e^{\left(\begin{smallmatrix} j_1 & ,\ldots, & j_l \\ m_1 & ,\ldots, & m_l \end{smallmatrix}\right)} \frac{1}{(s_{1\ldots j_1} - m_1)\ldots(s_{1\ldots j_l} - m_l)} \qquad (m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{Z}\ ;\ e^\bullet \in \mathbb{Q})$$

avec des résidus $e^\bullet$ eux-mêmes rationnels.

Mais on peut préciser encore davantage : les sommes $s_{1\ldots j_p} := s_1 + \cdots + s_{j_p}$ figurant dans les multipôles répondent toujours du côté des racines de l'unité à des sommes nulles $\epsilon_{1\ldots j_p} := \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{j_p} = 0$ et les entiers relatifs m_{j_p} associés parcourent l'intervalle $]-\infty, p]$.

Le cas le plus simple est celui des multizêtas symétrals purs $\mathrm{Zea}^{s_1,\ldots,s_r}$, dont le lieu singulier est très exactement :

$$\{\ s_1 = 1\ \} \bigcup_{j=2\ldots r} \ \bigcup_{n=0,1,2,3,\ldots} \{\ s_{1\ldots j} = j - 2n\ \} \tag{18}$$

Non-enrichissement arithmétique, non-enrichissement algébrique. Appelons *longueur-positive* d'une séquence $\mathbf{s} := (s_1, \ldots, s_r)$. le plus grand entier $\rho := \rho(\mathbf{s})$ donnant lieu à une factorisation en ρ séquences-facteurs de somme strictement positive :

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}^1\mathbf{s}^2\ldots\mathbf{s}^\rho\mathbf{s}^\star \quad \textit{avec} \quad \| \mathbf{s}^1 \| > 0, \ldots, \| \mathbf{s}^\rho \| > 0 \ \ \textit{mais} \ \ \| \mathbf{s}^\star \| \leq 0 \tag{19}$$

seul le dernier facteur $\mathbf{s}^\star$ pouvant être vide. Ainsi pour une même longueur $r=2$ on peut avoir les longueurs-positives :

$$\rho(-3,-5)=\rho(-5,3)=0;\ \rho(-3,5)=\rho(5,-3)=\rho(3,-5)=1;\ \rho(3,5)=2$$

Tout multizêta 'entier' et de longueur-positive ρ [6] *est combinaison linéaire* finie*, à coefficients rationnels, de multizêtas 'entiers-positifs' et de longueurs* $r'\leq\rho$*. En particulier, les multizêtas 'entiers-négatifs' (cas* $\rho=0$*) sont tous rationnels.* A condition d'ajouter aux divers $\mathbb{Q}$-anneaux de multizêtas la constante d'Euler et ses puissances, l'énoncé précédent s'étend à toutes les valeurs 'lisibles' aux points $\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^r$, après retrait des éventuels pôles qui s'y trouvent [7].

On ne perd donc rien, sur le plan arithmétique, à oublier les multizêtas 'entiers-relatifs'. Mais on ne perd rien non plus sur le plan algébrique. En effet : par prolongement analytique, la symétrélité de $Ze^\bullet$ et la symétralité de $Zea^\bullet$ s'étendent à $\mathbb{C}^r$ tout entier [8] et en particulier à $\mathbb{Z}^r$ mais les relations apparemment 'nouvelles' ainsi obtenues se déduisent toutes par voie algébrique des relations 'anciennes' entre les seuls multizêtas 'entiers-positifs.'

Equation de réflexion et moules bernoulliens.
Les moules bernoulliens $Se^\bullet, Sesing^\bullet, Sereg^\bullet$ servent à décrire les singularités des multizêtas, portées comme on a vu par les facteurs $Zesing_k^\bullet$ et $Zeasing_k^\bullet$ de (16),(17). Leurs indices $\binom{\sigma_j}{\epsilon_j}$ parcourent $\mathbb{C}\times(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ et ils sont définis à partir des facteurs :

$$(20)\quad J^{\binom{\epsilon_j}{\sigma_j}} := \frac{e_j}{e^{\sigma_j}-e_j} := \frac{1}{e^{\sigma_j-2\pi i\epsilon_j}-1}$$

$$(21)\quad P^{\binom{\epsilon_j}{\sigma_j}} := \frac{1}{\sigma_j}\ \textit{si}\ \epsilon_j=0\ \ (i.e.\ \ e_j=1)\quad \textit{et}\ \ P^{\binom{\epsilon_j}{\sigma_j}}:=0\ \ \textit{sinon}$$

au moyen des relations :

$$(22)\qquad \mathrm{Se}^{\binom{\epsilon_1\ ,\dots,\ \epsilon_r}{\sigma_1\ ,\dots,\ \sigma_r}} := J^{\binom{\epsilon_1}{\sigma_1}}J^{\binom{\epsilon_{12}}{\sigma_{12}}}\dots J^{\binom{\epsilon_{1\dots r-1}}{\sigma_{1\dots r-1}}}\big(1+J^{\binom{\epsilon_{1\dots r}}{\sigma_{1\dots r}}}\big)$$

$$(23)\qquad \mathrm{Sesing}^{\binom{\epsilon_1\ ,\dots,\ \epsilon_r}{\sigma_1\ ,\dots,\ \sigma_r}} := J^{\binom{\epsilon_1}{\sigma_1}}J^{\binom{\epsilon_{12}}{\sigma_{12}}}\dots J^{\binom{\epsilon_{1\dots r-1}}{\sigma_{1\dots r-1}}}P^{\binom{\epsilon_{1\dots r}}{\sigma_{1\dots r}}}$$

$$(24)\qquad \mathrm{Se}^\bullet = \mathrm{Sesing}^\bullet\times\mathrm{Sereg}^\bullet$$

avec bien sûr :

$$(25)\qquad \mathrm{Se}^\emptyset:=0\ \ ;\ \ \mathrm{Sesing}^\emptyset:=0\ \ ;\ \ \mathrm{Sereg}^\emptyset:=0$$

---

[6] i.e. répondant à une séquence $\mathbf{s}\in\mathbb{Z}^r$ avec $\rho(\mathbf{s})=\rho$

[7] opération légitime, car les éventuels pôles en question ont des résidus qui, d'après ce qui précède, sont eux-mêmes des multizêtas 'entiers'. La *soustraction des pôles* est donc ici un geste bien plus anodin que la *prise de dérivées partielles* – que l'on s'interdit.

[8] plus exactement, toute relation de symétrélité/ symétralité qui évite les pôles sera automatiquement vérifiée.

On leur associe également les trois moules $Sea^\bullet, Seasing^\bullet, Seareg^\bullet$ déduits en postcomposant par $Exp^\bullet$:

$$\mathrm{Sea}^\bullet := \mathrm{Se}^\bullet \circ \mathrm{Exp}^\bullet \ ; \ \mathrm{Seasing}^\bullet := \mathrm{Sesing}^\bullet \circ \mathrm{Exp}^\bullet \ ; \ \mathrm{Seareg}^\bullet := \mathrm{Sereg}^\bullet \circ \mathrm{Exp}^\bullet$$

et qui donnent lieu à la même factorisation :

$$\mathrm{Sea}^\bullet = \mathrm{Seasing}^\bullet \times \mathrm{Seareg}^\bullet \tag{26}$$

Le moule $Se^\bullet$ est symétrel, mais pas ses facteurs $Sesing^\bullet$ ni $Sereg^\bullet$.
Le moule $Sea^\bullet$ est symétral, mais pas ses facteurs $Seasing^\bullet$ ni $Seareg^\bullet$.
Pour un r et des ϵ_j fixés, les fonctions $Sereg^\bullet$ et $Seareg^\bullet$ sont holomorphes en les σ_j au-dessus de $\mathbb{R}^r$: ces moules représentent donc la partie régulière de $Se^\bullet$ et $Sea^\bullet$, tandis que $Sesing^\bullet$ et $Seasing^\bullet$ représentent la partie singulière pure.
Enfin, le facteur singulier $Seasing^\bullet$ vérifie la relation d'imparité :

$$\mathrm{Seasing}^{\binom{-\epsilon_1\ ,\dots,\ -\epsilon_r}{-\sigma_1\ ,\dots,\ -\sigma_r}} \equiv (-1)^r\ \mathrm{Seasing}^{\binom{\epsilon_1\ ,\dots,\ \epsilon_r}{\sigma_1\ ,\dots,\ \sigma_r}} \tag{27}$$

et $Sesing^\bullet$ vérifie une relation analogue, quoiqu'un peu moins simple. C'est là, semble-t-il, à peu près tout ce qui survit de l'équation de réflexion (dite abusivement "équation fonctionnelle") de la fonction ζ classique.

Quant à l'*hypothèse de Riemann*, si elle a un analogue, seule une exploration numérique – qui reste à faire – pourrait permettre de le formuler sensément. Il devrait en tout état de cause porter non sur $Ze^\bullet$ mais sur $Zea^\bullet$, puisque les variétés où $Zea^\bullet$ s'annule (à l'encontre de celles où $Ze^\bullet$ s'annule) 'passent' par les zéros des analogues classiques ζ et L_χ.

En résumé, les multizêtas "entiers" :
(i) restent définis pour les s_j entiers relatifs – en dehors des singularités, ou même en celles-ci, après soustraction canonique des multipôles
(ii) conservent leurs symétries d'origine
(iii) s'expriment comme combinaisons rationnelles des multizêtas 'entiers-positifs'
(iv) les 'nouvelles relations' de symétrélité portant sur les 'nouveaux multizêtas' n'induisent, après élimination de ces derniers, aucune relation 'nouvelle' sur les 'anciens multizêtas'.

Ces énoncés vont tous dans le même sens : ils incitent à ne s'occuper que des multizêtas 'entiers positifs'.

7. Multizêtas numériques et multizêtas symboliques

Le *premier codage* des multizêtas *entiers* (d'indices s_j entiers ≥ 1) et *modulés* est donné par la formule familière :

$$\mathrm{Ze}_*^{\binom{\epsilon_1\ ,\dots,\ \epsilon_r}{s_1\ ,\dots,\ s_r}} := \sum_{n_1>\dots n_r>0} n_1^{-s_1}\dots n_r^{-s_r}\ e_1^{n_1}\dots e_r^{n_r} \tag{28}$$

avec $s_j \in \mathbb{N}^*$, $\epsilon_j \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $e_j := \exp(2\pi i \epsilon_j)$ et avec un indice $*$ qui signale qu'on se limite provisoirement au cas 'convergent' $\binom{\epsilon_1}{s_1} \neq \binom{0}{1}$, qui correspond à la convergence ou semi-convergence de la série (28).

Le *second codage* est lui-aussi susceptible d'une définition directe, via les polylogarithmes, mais mieux vaut ici, pour aller vite, le dériver du premier codage, moyennant les formules de conversion :

$$\mathrm{Wa}_*^{e_1, 0^{[s_1-1]}, \ldots, e_r, 0^{[s_r-1]}} := \mathrm{Ze}_*^{\left(\begin{smallmatrix} \epsilon_r & , & \epsilon_{r-1:r} & ,\ldots, & \epsilon_{1:2} \\ s_r & , & s_{r-1} & ,\ldots, & s_1 \end{smallmatrix}\right)} \tag{29}$$

$$\mathrm{Ze}_*^{\left(\begin{smallmatrix} \epsilon_1 & , & \epsilon_2 & ,\ldots, & \epsilon_r \\ s_1 & , & s_2 & ,\ldots, & s_r \end{smallmatrix}\right)} =: \mathrm{Wa}_*^{e_1 \ldots e_r, 0^{[s_r-1]}, \ldots, e_1 e_2, 0^{[s_2-1]}, e_1, 0^{[s_1-1]}} \tag{30}$$

Ici $0^{[s-1]}$ dénote une séquence de $s-1$ zéros consécutifs (elle est vide si $s=1$). Pour $\epsilon_j \equiv 0$ ($\Leftrightarrow e_j \equiv 1$), nous retrouvons les multizêtas usuels.

Les multizêtas sont le prototype des familles de constantes dimorphes : ils sont doublement clos pour la multiplication, puisqu'à chacun des codages correspond une manière distincte de calculer leurs produits. Ce sont les deux systèmes classiques de *relations quadratiques*, qui en language moulien s'énoncent comme suit :

(i) *Le moule* $\mathrm{Ze}_*^\bullet$ *est symétrel partout où il est défini et il possède une extension symétrèle unique* $\mathrm{Ze}^\bullet$ *au cas général* $(s_i \geq 1)$ *qui assure* $\mathrm{Ze}^{\binom{0}{1}} = 0$ *.*

(ii) *Le moule* $\mathrm{Wa}_*^\bullet$ *est symétral partout où il est défini et il possède une extension symétrale unique* $\mathrm{Wa}^\bullet$ *au cas général qui assure* $\mathrm{Wa}^1 = 0$ *.*

Mais ces deux extensions – symétrèle et symétrale – ne se correspondent plus exactement par (30). Soit $Mono^\bullet$ le moule élémentaire, dont toutes les composantes sont nulles, sauf les composantes de la forme $Mono^{\left(\begin{smallmatrix} 0 & ,\ldots, & 0 \\ 1 & ,\ldots, & 1 \end{smallmatrix}\right)}$, qui s'expriment simplement en fonction des monozêtas :

$$1 + \mathrm{Mono}^{\binom{0}{1}}\, t + \mathrm{Mono}^{\left(\begin{smallmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 1 \end{smallmatrix}\right)}\, t^2 + \ldots := \exp\Big(\sum_{k \geq 2} (-1)^{k+1} \zeta(k)\, \frac{t^k}{k}\Big) \tag{31}$$

et soit le moule $Zee^\bullet$ déduit *exactement* du moule $Wa^\bullet$ selon la correspondance (30). Alors la correspondance rigoureuse $Ze^\bullet \leftrightarrow Wa^\bullet$ s'écrit :

$$\mathrm{Ze}^\bullet = \mathrm{mu}(\mathrm{Mono}^\bullet, \mathrm{Zee}^\bullet) \tag{32}$$

Une masse de données numériques et d'indices théoriques ([Bro], [Bor], [MP]) suggèrent que ce double système de 'relations quadratiques' épuise effectivement les contraintes algébriques reliant entre eux les 'vrais' multizêtas, i.e. les multizêtas *numériques.* Il est donc raisonnable de remplacer ces derniers – dont l'étude arithmétique semble pour l'instant hors de portée [9]– par les multizêtas *formels* ou *symboliques*, notés $ze^\bullet, wa^\bullet$ avec des minuscules et soumis pour toute contrainte :

[9]malgré les travaux d'Apéry ([A],[C]) et aussi ceux, tout récents et très prometteurs, de T. Rivoal ([R])

(i) à la symétrélité de $ze^\bullet$
(ii) à la symétralité de $wa^\bullet$
(iii) à la règle de conversion (32)
puis de tâcher d'élucider toutes les conséquences algébriques de (i)+(ii)+(iii).

Relations 'gonales'.
Outre les deux familles de *relations quadratiques* qui sous-tendent la formalisation ci-dessus, les vrais multizêtas vérifient une foule de relations remarquables. En particulier :
(i) la relation *digonale*, [10] à 2 termes, également connue comme *involution de Hoffman*
(ii) la relation *pentagonale*, à 5 termes, due à Drinfel'd
(iii) la relation *hexagonale*, à 6 termes, elle aussi due à Drinfel'd

L'importance de ce système de *relations 'gonales'* vient de ce qu'il sous-tend la construction des *associateurs de Drinfel'd.* Il vaudrait donc la peine de montrer son équivalence avec le système de relations quadratiques, mais pour l'instant seule est acquise[11] l'implication :

$$\{relations \quad quadratiques\} \implies \{relation \quad digonale\}$$

8. Séries génératrices $zag^\bullet/zig^\bullet$ et reformulation du problème

Pris sous forme *scalaire*, les multizêtas sont assez peu maniables. Il convient donc de remplacer les 'scalaires' $ze^\bullet, wa^\bullet$ par des *séries génératrices* choisies, si faire se peut, de manière à préserver la simplicité des deux symétries et la transparence de la règle de conversion. Les bonnes définitions sont celles-ci :

$$\mathrm{zig}^{\binom{\epsilon_1\ ,\dots,\ \epsilon_r}{v_1\ ,\dots,\ v_r}} := \sum_{1\le s_j} \mathrm{ze}^{\binom{\epsilon_1\ ,\dots,\ \epsilon_r}{s_1\ ,\dots,\ s_r}}\ v_1^{s_1-1}\dots v_r^{s_r-1} \tag{33}$$

$$\mathrm{zag}^{\binom{u_1\ ,\dots,\ u_r}{\epsilon_1\ ,\dots,\ \epsilon_r}} := \sum_{1\le s_j} \mathrm{wa}^{e_1,0^{[s_1-1]},\dots,e_r,0^{[s_r-1]}}\ u_1^{s_1-1}u_{12}^{s_2-1}\dots u_{12\dots r}^{s_r-1} \tag{34}$$

Nous avons alors les équivalences :

$$\mathrm{ze}^\bullet\ \mathit{symetrel} \iff \mathrm{zig}^\bullet\ \mathit{symetril} \tag{35}$$

$$\mathrm{wa}^\bullet\ \mathit{symetral} \iff \mathrm{zag}^\bullet\ \mathit{symetral} \tag{36}$$

et la règle de conversion (32) devient :

$$\mathrm{zig}^\bullet = \mathrm{mu}(\mathrm{mini}^\bullet, \mathrm{swap}(\mathrm{zag})^\bullet) \tag{37}$$

$$(\iff \mathrm{swap}(\mathrm{zig}^\bullet) = \mathrm{mu}(\mathrm{zag}^\bullet, \mathrm{mana}^\bullet)) \tag{38}$$

---

[10] *di*gonale et non pas *dia*gonale
[11] cf Addition 4, §31, *infra.*

pour des moules élémentaires $mana^\bullet/mini^\bullet$ dont les seules composantes non-nulles valent :

$$\text{(39)} \qquad \mathrm{mana}^{\binom{u_1\ ,\dots,\ u_r}{0\ ,\dots,\ 0}} \equiv \mathrm{mini}^{\binom{0\ ,\dots,\ 0}{v_1\ ,\dots,\ v_r}} \equiv \mathrm{mono}^{\binom{0\ ,\dots,\ 0}{1\ ,\dots,\ 1}} \ (r\ fois)$$

Ainsi, étudier les multizêtas formels revient à chercher et décrire toutes les paires $zag^\bullet/zig^\bullet$ qui sont
– de type symétral/symétril,
– liées essentiellement (i.e. modulo des constantes) par le *swap*,
– à valeurs dans l'anneau des séries formelles en $\mathbf{u}$ ou $\mathbf{v}$.

Remarque. Alors que les moules $zag^\bullet/zig^\bullet$ fabriqués à partir des multizêtas formels ont pour composantes de simples séries formelles, les moules $Zag^\bullet/Zig^\bullet$ correspondant aux 'vrais' multizêtas ont pour composantes de véritables fonctions méromorphes aux propriétés intéressantes : elles vérifient par exemple des systèmes d'équations aux différences sur lequels se lisent non seulement leur type de symétrie (symétral/symétril) mais encore la règle de conversion (37) qui fait passer des unes aux autres.

9. Dérivations et automorphismes sur l'algèbre des bimoules : ARI/GARI et les structures annexes

Il s'agit ici d'introduire de manière naturelle la structure dont nous avons besoin : celle où vivent, se factorisent et s'analysent nos moules $zag^\bullet/zig^\bullet$; celle surtout qui permet de construire, comprendre et dénombrer les *bialternals*, en quoi $zag^\bullet/zig^\bullet$ se décompose en dernière analyse.

Dans toute la suite, BIMU désignera l'algèbre des bimoules avec son produit associatif *mu* et le crochet de Lie associé *limu* [12]. Le groupe multiplicatif BIMU* (resp. l'algèbre de Lie BIMU$_*$) rassemblera tous les bimoules tels que $M^\emptyset = 1$ (resp. 0).

Les majuscules cursives $\mathcal{A}^\bullet = (\mathcal{A}^\bullet_L, \mathcal{A}^\bullet_R)$ etc. . . désigneront des paires d'éléments de BIMU (L pour *left* , R pour *right*). A ces paires seront associés des opérateurs $axit(\mathcal{A}^\bullet)$ et $gaxit(\mathcal{A}^\bullet)$ que nous ferons agir sur BIMU.

Dérivations/automorphismes de BIMU.
Cherchons toutes les dérivations et automorphismes de BIMU qui soient *'symplectiques'*, i.e. exprimables au moyen des seules *contractions* [13] $\rceil, \lfloor$ et $\rfloor, \lceil$ ainsi appariées.

Pour tout $\mathcal{A}^\bullet \in BIMU_\star \times BIMU_\star$ *, l'application*

$$\mathrm{axit}(\mathcal{A}^\bullet) : \qquad BIMU \to BIMU \quad ; \quad M^\bullet \mapsto N^\bullet := \mathrm{axit}(\mathcal{A}^\bullet).M^\bullet$$

[12] $\mathrm{limu}(A^\bullet, B^\bullet) := \mathrm{mu}(A^\bullet, B^\bullet) - \mathrm{mu}(B^\bullet, A^\bullet)$
[13] techniquement qualifiées de *'flexions'* : cf [E6].

avec

$$(40)\qquad N^{\mathbf{w}} := \sum^{1}_{\mathbf{w}=\mathbf{abc};\mathbf{b}\neq\emptyset;\mathbf{c}\neq\emptyset} M^{\mathbf{a}\lceil\mathbf{c}}\mathcal{A}_L^{\mathbf{b}\rfloor} + \sum^{2}_{\mathbf{w}=\mathbf{abc};\mathbf{a}\neq\emptyset;\mathbf{b}\neq\emptyset} M^{\mathbf{a}\rceil\mathbf{c}}\mathcal{A}_R^{\lfloor\mathbf{b}}$$

est une dérivation de BIMU.

Pour un $\mathbf{w}$ de longueur 1, les sommes $\sum^1,\sum^2$ sont nulles; pour une longueur r, elles comportent chacune $r(r-1)/2$ termes.

Pour tout $\mathcal{A}^\bullet \in BIMU^\star \times BIMU^\star$ *, l' application :*

$$\mathrm{gaxit}(\mathcal{A}^\bullet) : \qquad BIMU \to BIMU \quad ; \quad M^\bullet \mapsto N^\bullet := \mathrm{gaxit}(\mathcal{A}^\bullet).M^\bullet$$

avec

$$(41)\qquad N^{\mathbf{w}} := \sum M^{\lceil\mathbf{b^1}\rceil\lceil\mathbf{b^2}\rceil\dots\lceil\mathbf{b^s}\rceil}\ \mathcal{A}_L^{\mathbf{a^1}\rfloor}\mathcal{A}_L^{\mathbf{a^2}\rfloor}\dots\mathcal{A}_L^{\mathbf{a^s}\rfloor}\ \mathcal{A}_R^{\lfloor\mathbf{c^1}}\mathcal{A}_R^{\lfloor\mathbf{c^2}}\dots\mathcal{A}_R^{\lfloor\mathbf{c^s}}$$

et avec une somme étendue à toutes les factorisations

$$\mathbf{w} = \mathbf{a^1b^1c^1a^2b^2c^2}\dots\mathbf{a^sb^sc^s} \quad pour \quad s\geq 1;\ \ \mathbf{b^i}\neq\emptyset;\ \ \mathbf{c^ia^{i+1}}\neq\emptyset$$ [14]

est un automorphisme de BIMU.

La somme dans (41) comporte toujours le terme $M^{\mathbf{w}}$. Pour un $\mathbf{w}$ de longueur 1, elle se réduit à ce seul terme.

L'algèbre AXI.
Les dérivations axit *sont stables pour le crochet de Lie des opérateurs. Plus précisément, on a identiquement*

$$[\mathrm{axit}(\mathcal{B}^\bullet),\mathrm{axit}(\mathcal{A}^\bullet)] = \mathrm{axit}(\mathcal{C}^\bullet) \quad avec \quad \mathcal{C}^\bullet = \mathrm{axi}(\mathcal{A}^\bullet,\mathcal{B}^\bullet)$$

pour une loi axi *donnée par :*

$$\begin{aligned} &\mathcal{C}_L^\bullet := \mathrm{axit}(\mathcal{B}^\bullet).\mathcal{A}_L^\bullet - \mathrm{axit}(\mathcal{A}^\bullet).\mathcal{B}_L^\bullet + \mathrm{limu}(\mathcal{A}_L^\bullet,\mathcal{B}_L^\bullet)\\ (42)\qquad &\mathcal{C}_R^\bullet := \mathrm{axit}(\mathcal{B}^\bullet).\mathcal{A}_R^\bullet - \mathrm{axit}(\mathcal{A}^\bullet).\mathcal{B}_R^\bullet - \mathrm{limu}(\mathcal{A}_R^\bullet,\mathcal{B}_R^\bullet)\end{aligned}$$

On note AXI *l'algèbre de Lie formée des paires* $\mathcal{A}^\bullet \in \mathrm{BIMU}_\star \times \mathrm{BIMU}_\star$ *et munie de cette loi* axi [15].

Le groupe GAXI.
Les automorphismes gaxit *sont stables pour le crochet de Lie des opérateurs. Plus précisément, on a identiquement*

$$\mathrm{gaxit}(\mathcal{B}^\bullet).\mathrm{gaxit}(\mathcal{A}^\bullet) = \mathrm{gaxit}(\mathcal{C}^\bullet) \quad avec \quad \mathcal{C}^\bullet = \mathrm{gaxi}(\mathcal{A}^\bullet,\mathcal{B}^\bullet)$$

---

[14] autrement dit deux séquences-facteurs consécutives $\mathbf{c^i}$ et $\mathbf{a^{i+1}}$ ne peuvent être simultanément vides, mais les séquences-facteurs extrêmes $\mathbf{a^1}$ et $\mathbf{c^s}$ peuvent l'être, séparément ou simultanément. Bien entendu, si $\mathbf{b^i}$ est précédé (resp. suivi) d'un facteur $\mathbf{a^i}$ (resp. $\mathbf{c^i}$) vide, la contraction correspondante $\mathbf{b^i}\mapsto\lceil\mathbf{b^i}$ (resp.$\mathbf{b^i}\rceil$) devient inopérante.

[15] qui se trouve automatiquement vérifier l'identité de Jacobi.

pour une loi associative gaxi *donnée par :*

$$\mathcal{C}^\bullet_L := \mathrm{mu}(\mathrm{gaxit}(\mathcal{B}^\bullet).\mathcal{A}^\bullet_L\ ,\ \mathcal{B}^\bullet_L)$$

$$\mathcal{C}^\bullet_R := \mathrm{mu}(\mathcal{B}^\bullet_R\ ,\ \mathrm{gaxit}(\mathcal{B}^\bullet).\mathcal{A}^\bullet_R) \qquad (43)$$

On note GAXI *le groupe de Lie formé des paires* $\mathcal{A}^\bullet \in \mathrm{BIMU}^\star \times \mathrm{BIMU}^\star$ *et muni de cette loi* gaxi.

Sous-structures de AXI/GAXI.
Pour se donner un élément de AXI ou GAXI, il faut se donner une *paire* $\mathcal{A}^\bullet_L, \mathcal{A}^\bullet_R$ d'éléments de BIMU. Mais nous aurons surtout affaire à des sous-algèbres/sous-groupes de AXI/GAXI où les paires en question se réduisent en fait à *un seul élément*, l'autre étant soit nul, soit déterminé par le premier au moyen d'une involution. Voici le tableau de ces sous-algèbres/sous-groupes :

Algbres		*Groupes*	
AXI	: $\mathcal{A}^\bullet_R, \mathcal{A}^\bullet_L \in BIMU_\star$	$GAXI$	: $\mathcal{A}^\bullet_R, \mathcal{A}^\bullet_L \in BIMU^\star$
AMI	: $\mathcal{A}^\bullet_R = 0^\bullet$	$GAMI$	: $\mathcal{A}^\bullet_R = 1^\bullet$
ANI	: $\mathcal{A}^\bullet_L = 0^\bullet$	$GANI$	: $\mathcal{A}^\bullet_L = 1^\bullet$
ARI	: $\mathcal{A}^\bullet_R = -\mathcal{A}^\bullet_L$	$GARI$	: $\mathcal{A}^\bullet_R = \mathrm{invmu}(\mathcal{A}^\bullet_L)$
ALI	: $\mathcal{A}^\bullet_R = \mathrm{antar}(\mathcal{A}^\bullet_L)$	$GALI$	: $\mathcal{A}^\bullet_R = \mathrm{antar}(\mathcal{A}^\bullet_L)$
AXI_{invol}	: $\mathcal{A}^\bullet_R = \mathrm{invol}(\mathcal{A}^\bullet_L)$	$GAXI_{invol}$	: $\mathcal{A}^\bullet_R = \mathrm{invol}(\mathcal{A}^\bullet_L)$

Les paires AMI/GAMI et ANI/GANI correspondent à l'annulation de la composante droite ou gauche de $\mathcal{A}^\bullet$. Elles nous serviront beaucoup – surtout la seconde – mais indirectement, comme auxiliaires pour l'étude de ARI/GARI.

Les quatre choix $\mathrm{AXI_{invol}}/\mathrm{GAXI_{invol}}$ correspondent aux quatre involutions linéaires :

$$\mathrm{invol} \in \{\mathrm{anti}\ ,\ \mathrm{anti}\circ\mathrm{pari}\ ,\ \mathrm{anti}\circ\mathrm{neg}\ ,\ \mathrm{anti}\circ\mathrm{pari}\circ\mathrm{neg}\} \qquad (44)$$

lesquelles agissent de la même manière dans l'algèbre et dans le groupe. De ces quatre choix, seul nous servira celui qui correspond à l'involution *antar* := *anti* ∘ *pari*, où *pari* désigne la multiplication par $(-1)^r$ de la composante de longueur r. La paire associée sera notée ALI/GALI.

La paire ARI/GARI, fondamentale pour la suite, correspond à l'involution *minu* (multiplication par -1) dans l'algèbre et à l'involution fortement non-linéaire *invmu* (prise de l'inverse relativement à la multiplication moulienne *mu*) dans le groupe.

Parmi les 16 involutions engendrées par minu *(multiplication par -1) et par* anti, pari, neg, *cinq seulement, à savoir* minu *et les quatre involutions énumérées en (44), correspondent à des sous-algèbres de* AXI *de la la forme* $\mathcal{A}^\bullet_R = \mathrm{invol}(\mathcal{A}^\bullet_L)$. *On a le même énoncé pour* GAXI, *avec* invmu *à la place de* minu.

Il est remarquable que *id, neg, pari* ne soient pas parmi ces cinq involutions licites.

Sur les cinq algèbres/groupes ainsi construits, deux seulement, à savoir ARI/GARI *et* ALI/GALI *respectent les symétries alternal/symétral, mais ils les respectent totalement, non seulement par leur lois internes* ari/gari *et* ali/gali, *mais aussi par leur actions* arit/garit *et* alit/galit *dans* BIMU.

Comme justement nous avons besoin d'une structure qui respecte les types *alternal/symétral*, le choix semble se réduire à ARI/GARI et ALI/GALI. Mais en réalité il n'y a pas véritablement à choisir, puisqu'un bimoule *alternal* (resp. *symétral*) est automatiquent invariant par

$$\text{mantar} := \text{minu} \circ \text{anti} \circ \text{pari} \tag{45}$$

$$\textit{resp.} \quad \text{smantar} := \text{invmu} \circ \text{anti} \circ \text{pari} \tag{46}$$

et appartient par suite à l'intersection ARI∩ALI (resp. GARI∩GALI), où justement les deux structures *coïncident*.

En fait, le parallélisme va encore plus loin : les bimoules qui nous intéressent le plus possèdent une *double symétrie.* Ils sont par exemple alternals et de *swappé* alternal, ce qui les rend invariants non seulement par :

$$\text{swap} \circ \text{mantar} \circ \text{swap} \circ \text{mantar} = \text{neg} \circ \text{push} \tag{47}$$

mais aussi par *neg* et *push* séparément, tout au moins pour les composantes de longueur $r \geq 2$.

Or la plus grande sous-algèbre de ARI *(resp.* ALI*) où l'involution* swap *agt comme isomorphisme est précisément l'algèbre* $\mathrm{ARI}^{\mathrm{push}}$ *(resp.* $\mathrm{ALI}^{\mathrm{neg}}$*) des bimoules* push-*invariants (resp.* neg-*invariants)* [16].

Mais il faut tout de même fixer un cadre pour les occasions où nous aurons à manipuler des bimoules quelconques, et là plusieurs raisons poussent à choisir ARI/GARI de préférence à ALI/GALI. Précisons donc les lois correspondantes.

Le groupe GARI et son algèbre ARI.

Le crochet *ari* de ARI est donné par la formule :

$$\mathrm{ari}\,(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{B}^\bullet) := \mathrm{arit}\,(\mathrm{B}^\bullet)\,\mathrm{A}^\bullet - \mathrm{arit}\,(\mathrm{A}^\bullet)\,\mathrm{B}^\bullet + \mathrm{limu}\,(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{B}^\bullet) \tag{48}$$

qui sous forme développée s'écrit :

$$C^\bullet = \mathrm{ari}(A^\bullet, B^\bullet) \iff C^{\mathbf{w}} = \sum_{\mathbf{w}=\mathbf{b}.\mathbf{c}} (A^{\mathbf{b}} B^{\mathbf{c}} - B^{\mathbf{b}} A^{\mathbf{c}})$$
$$+ \sum_{\mathbf{w}=\mathbf{b}.\mathbf{c}.\mathbf{d}} (A^{\lfloor \mathbf{c}} B^{\mathbf{b} \rceil \mathbf{d}} - B^{\lfloor \mathbf{c}} A^{\mathbf{b} \rceil \mathbf{d}}) + \sum_{\mathbf{w}=\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}} (A^{\mathbf{a} \lceil \mathbf{c}} B^{\mathbf{b} \rfloor} - B^{\mathbf{a} \lceil \mathbf{c}} A^{\mathbf{b} \rfloor})$$

[16] En d'autres termes, non seulement *neg* et *push* se *séparent*, mais ils se *répartissent* entre ALI et ARI.

avec $\mathbf{b} \neq \emptyset, \mathbf{c} \neq \emptyset$ dans chacune des trois sommes (mais $\mathbf{a}$ et $\mathbf{d}$ peuvent être vides).

La loi *gari* de GARI est donnée par la formule :

$$\text{gari}\,(\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{B}^\bullet) := \text{mu}\,(\text{garit}\,(\mathrm{B}^\bullet)\,\mathrm{A}^\bullet, \mathrm{B}^\bullet) \tag{49}$$

qui sous forme développée s'écrit :

$$C^\bullet = \text{gari}(A^\bullet, B^\bullet) \qquad \Longleftrightarrow \qquad C^{\mathbf{w}} =$$

$$\sum_{\mathbf{w}=\mathbf{a^1}.\mathbf{b^1}.\mathbf{c^1}\ldots\mathbf{a^s}.\mathbf{b^s}.\mathbf{c^s}.\mathbf{a^{s+1}}} A^{\lceil \mathbf{b^1}\rceil \ldots \lceil \mathbf{b^s}\rceil} B^{\mathbf{a^1}\rfloor} \ldots B^{\mathbf{a^s}\rfloor} B^{\mathbf{a^{s+1}}\rfloor} B_\star^{\lfloor \mathbf{c^1}} \ldots B_\star^{\lfloor \mathbf{c^s}}$$

avec une somme étendue à tous les $s \geq 2$ et des séquences-facteurs sujettes seulement à $\mathbf{b^i} \neq \emptyset$ et $\mathbf{c^i}.\mathbf{a^{i+1}} \neq \emptyset$. Les facteurs $\mathbf{c^i}$ et $\mathbf{a^{i+1}}$ peuvent être vides mais *separément* et les facteurs extrêmes $\mathbf{a^1}$,$\mathbf{c^s}$,$\mathbf{a^{s+1}}$ aussi peuvent être vides, *séparément ou même simultanément*.

Ici $B_\star^\bullet$ dénote l'inverse $invmu(B^\bullet)$ de $B^\bullet$ pour le produit moulien *mu*. La loi binaire *gari* est donc affine en $A^\bullet$ mais violemment non-linéaire en $B^\bullet$.

Sous-structures de ARI/GARI. Symétries simples, symétries doubles et entre-deux.

Les plus intéressantes sous-structures de ARI/GARI sont caractérisées par des restrictions sur la $\mathbf{w}$-dépendance des bimoules (*entière, polaire, plate, etc*) et/ou par des contraintes algébriques du type

$$\forall r \quad \forall \mathbf{w} \qquad \sum_\tau \epsilon_\tau\, A^{\tau(\mathbf{w})} + \sum \ldots \tag{50}$$

$$\mathbf{w} := (w_1, \ldots, w_r) \in \mathbb{C}^{2r}; \quad \epsilon_\tau \in \mathbb{C}; \quad \tau \in Gl(2r, \mathbb{Z}) \tag{51}$$

avec une première somme impliquant un nombre fini de séquences $\tau(\mathbf{w})$ fonctions linéaires de $\mathbf{w}$ et une seconde somme $\sum \ldots$ n'impliquant que des séquences $\mathbf{w}^*$ de longueur strictement moindre. Les coefficients ϵ_τ sont souvent entiers et très simples (par exemple $\equiv 1$).

Les groupes S_r^{sub} engendrés par les τ [17] sont dits *sous-jacents* à la sous-structure envisagée. Selon qu'ils sont *finis* ou *infinis*, celle-ci est dite *primaire* ou *secondaire.*

Les principales *sous-structures primaires* contiennent les bimoules vérifiant l'une des 5 symétries de base : alternal/il/iil/ul/uul ou symétral/il/iil/ul/uul. Les groupes sous-jacents sont alors tout simplement les groupes symétriques Sa_r ou Si_r, agissant par permutation des r composantes de la séquence $\mathbf{w}$ ou de sa *swappée.*

Les principales *sous-structures secondaires* contiennent les bimoules vérifiant l'une des 5 symétries de base et de *swappés* vérifiant eux-aussi l'une de

[17] ou par leurs *quotients* si l'on n'a pas pris garde à normaliser en prenant l'un d'eux égal à l'identité.

ces symétries – la même ou une autre. Les groupes sous-jacents correspondants, $< Sa_r, Si_r >$, bien qu'engendrés par deux groupes finis (le groupe Sa_r des permutations de la séquence $\mathbf{w}$ et le groupe Si_r des permutations de la séquence swappée) sont alors infinis dès que $r \geq 3$.

On doit donc s'attendre à ce que les algèbres secondaires – qui nous intéressent plus directement, car c'est là que vivent toutes les fonctions génératrices de nos multizêtas – soient d'une complexité bien supérieure à celle des primaires, et tel est bien le cas.

Toutefois, et fort heureusement, entre ces deux types extrêmes s'insèrent des algèbres *intermédiaires* ou *présecondaires*, qui tout en gardant la simplicité des primaires (elles ont un groupe sous-jacent fini du type $< Sa_r, neg >$ ou $< Si_r, push >$), s'apparentent néanmoins de très près aux secondaires (comme celles-ci, elles possèdent une involution non triviale – le *swap* ou l'une de ses variantes) et en facilitent grandement l'étude.

Enumérons quelques exemples.

L'espace $\mathrm{ARI}_{\mathrm{al}/\bullet}$ *de tous les bimoules alternals est une sous-algèbre de* ARI *et l'espace* $\mathrm{GARI}_{\mathrm{as}/\bullet}$ *de tous les bimoules symétrals est un sous-groupe de* GARI.

Ce sont les deux exemples-type de sous-structure primaire, correspondant à la stabilité pour une symétrie simple.

L'espace $\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ *de tous les bimoules pairs et bialternals (i.e. alternals et de* swappé *alternal) est une sous-algèbre de* ARI. *Pareillement, l'espace* $\mathrm{GARI}_{\underline{\mathrm{as/as}}}$ *de tous les bimoules pairs et bisymétrals est un sous-groupe de* GARI.

Ce sont les deux exemples-type de sous-structure secondaire, correspondant à la stabilité pour une symétrie double.

Ici, "pair" signifie *neg*-invariant : pour tout r, on impose à la composante $A^{w_1,\dots,w_r}$ d'être une fonction paire de $\mathbf{w}$. En fait, comme on l'a dit, cette parité est *presque* une conséquence de la double symétrie : on montre que, chez tout bimoule bialternal, les composantes de longueur $r \geq 2$ sont automatiquement paires. La composante de longueur 1 peut ne pas l'être mais pour avoir stabilité pour le crochet *ari* il faut lui imposer à elle aussi d'être paire. On signale cette condition subsidiaire de parité par un soulignement : par exemple $\underline{\mathrm{al/al}}$ ou $\underline{\mathrm{as/as}}$. Cette *parité subsidiaire*, assez anodine sur les algèbres, ne l'est plus du tout sur les groupes. Ainsi les groupes $\mathrm{GARI}_{\underline{\mathrm{as/as}}}$ et $\mathrm{GARI}_{\underline{\mathrm{as/is}}}$ diffèrent-ils radicalement de $\mathrm{GARI}_{\mathrm{as/as}}$ et $\mathrm{GARI}_{\mathrm{as/is}}$ (qui ne sont pas des groupes).

Nous avons également entrevu une deuxième conséquence de la double symétrie, à savoir l'invariance pour une transformation de type idempotent :
(i) le *push* sur $\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$

(ii) le *spush* sur $\mathrm{GARI}_{\underline{\mathrm{as/as}}}$
(iii) diverses variantes de *push/spush* sur $\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$, $\mathrm{GARI}_{\underline{\mathrm{as/is}}}$, etc.

La double symétrie a une troisième conséquence : le *swap*, qui n'est pas un isomorphisme d'algèbre/groupe quand on l'envisage sur ARI/GARI tout entier, en devient un dès qu'on le restreint à $\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/al}}}/\mathrm{GARI}_{\underline{\mathrm{as/as}}}$.

Entre ces sous-structures définies par une symétrie tantôt simple tantôt double, existe la catégorie intermédiaire, évoquée plus haut. Ce sont des sous-algèbres/sous-groupes tels que :

$$\mathrm{ARI}^{\mathrm{push}}_{\underline{\mathrm{al}/\bullet}},\quad \mathrm{ARI}^{\mathrm{push}}_{\underline{\bullet/\mathrm{al}}},\quad \mathrm{GARI}^{\mathrm{spush}}_{\underline{\mathrm{as}/\bullet}},\quad \mathrm{GARI}^{\mathrm{spush}}_{\underline{\bullet/\mathrm{as}}}$$

qui regroupent les bimoules possèdant pleinement *une* symétrie plus des *'traces'* d'une seconde symétrie, à savoir la *push/spush*-invariance ou quelque variante. Tout en restant *primaires*, ces sous-structures se rapprochent des secondaires et en facilitent l'étude. Par exemple, la théorie hilbertienne des invariants leur est applicable, mais cesse de l'être, du moins directement, dès qu'on passe au secondaire.

10. Origine et vocation de ARI/GARI

Origine de ARI/GARI.
La structure ARI/GARI a été introduite vers la fin des années 80, mais dans un cadre tout différent – l'étude des perturbations singulières – et par le biais d'une transformation moulienne très particulière : le *scramble*.

Le *scramble* opère de la manière suivante :

$$(52)\qquad A^\bullet \mapsto B^\bullet \;=\; \mathrm{scramble}(A^\bullet)\ \textit{avec}\ B^\bullet \;:=\; \sum_{\mathbf{w}^* \,\in\, \mathrm{scram}(\mathbf{w})} \epsilon(\mathbf{w},\mathbf{w}^*)\ A^{\mathbf{w}^*}$$

où $scram(\mathbf{w})$ désigne l'ensemble de toutes les sequences $\mathbf{w}^* = \left(\begin{smallmatrix} u_1^* & ,\dots, & u_r^* \\ v_1^* & ,\dots, & v_r^* \end{smallmatrix}\right)$ de même longueur r que $\mathbf{w} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 & ,\dots, & u_r \\ v_1 & ,\dots, & v_r \end{smallmatrix}\right)$ et caracterisées par la propriété que pour tout $j \in \{1,\dots,r\}$:

$$(53)\qquad u_1^*v_1^* + u_2^*v_2^* + \dots u_j^*v_j^* = \sum_{1\le i\le j} \Big(\sum_{p_{j,i-1}<p\le p_{j,i}} u_p \Big) v_{q_{j,i}}$$

relativement à une certaine paire $\{p_{j,k}\},\{q_{j,k}\}$ de séquences imbriquées :

$$0 = p_{j,0} < q_{j,1} \le p_{j,1} < q_{j,2} \le p_{j,2} < \dots < q_{j,j} \le p_{j,j} < r$$

Il existe exactement $r!! := 1.3\dots(2r-1)$ séquences $\mathbf{w}^*$ de ce type. Chaque u_j^* est somme d'un ou plusieurs u_i consécutifs et chaque v_j^* est soit de la forme $v_{j_\star}$, auquel cas on pose $\epsilon(\mathbf{w},\mathbf{w}^*,j) := 1$, soit de la forme $v_{j_\star} - v_{j_{\star\star}}$, auquel cas on pose $\epsilon(\mathbf{w},\mathbf{w}^*,j) := \mathrm{signe}(j_{\star\star} - j_\star)$. (Notez l'inversion). Le produit de tous ces signes donne le facteur-signe global $\epsilon(\mathbf{w},\mathbf{w}^*) := \prod_{j=1}^{j=r} \epsilon(\mathbf{w},\mathbf{w}^*,j)$ dans la définition du *scramble*.

Par exemple, pour $r = 2$ on obtient :

$$B^{w_1,w_2}(x) \equiv A^{\boldsymbol{\omega}^1}(x) + A^{\boldsymbol{\omega}^2}(x) - A^{\boldsymbol{\omega}^3}(x) \tag{54}$$

$$\textit{avec} \quad \boldsymbol{\omega}^1 = (u_1 v_1, u_2 v_2)\ ; \quad \boldsymbol{\omega}^2 = (u_{12} v_2, u_1 v_{1:2})\ ; \quad \boldsymbol{\omega}^3 = (u_{12} v_1, u_2 v_{2:1})$$

Dans la définition (52), on a pris pour $A^\bullet$ un bimoule, mais on pourrait tout aussi bien prendre un moule, à condition d'interprêter les $A^{\mathbf{w}^*}$ comme $A^{u_1^* v_1^*,\dots,u_r^* v_r^*}$. On voit ainsi que le *scramble* change indifféremment moules et bimoules en bimoules.

L'importance du *scramble* tient en grande part à ce qu'il préserve les deux principaux types de symétrie : *si un moule ou bimoule $A^\bullet$ est alternal (resp. symétral), le bimoule $B^\bullet = \mathrm{scramble}(A^\bullet)$ l'est aussi.*

Les (bi)moules remarquables ont souvent des *'scramblés'* remarquables. Ainsi le moule symétral $\mathcal{V}^\bullet(z)$, qui joue un rôle central dans l'étude de la *résurgence équationnelle* et des *systèmes singuliers*, devient le bimoule $S^\bullet(x) := \mathrm{scramble}(\mathcal{V}^\bullet(x))$, indispensable en théorie de la *résurgence coéquationnelle* et des *systèmes singulièrement perturbés* : voir [E3], [E4], §1,§2.

Comme répondant scalaire des monômes de résurgence symétrals $\mathcal{V}^\bullet(z)$ on a les moniques hyperlogarithmiques alternales $V^\bullet = V^\bullet_{\omega_0}$ qui figurent dans les équations de résurgence [18] :

$$\Delta_{\omega_0} \mathcal{V}^\bullet(z) = V^\bullet_{\omega_0} \times \mathcal{V}^\bullet(z) \tag{55}$$

Sous l'action du *scramble*, le moule hyperlogarithmique $V^\bullet$ devient le bimoule $tes^\bullet := scramble(V^\bullet)$, dit de *tesselation* ([E3]) , qui régit la géometrie de la résurgence coéquationelle et possède nombre de propriétés curieuses, comme celle d'être *localement constant en sa double séries de variables* u_i, v_i, bien que $tes^\bullet$ se présente comme superposition de fonctions très complexes.

Originalité de ARI/GARI.

S'il est vrai que ARI *contient*, comme cas très particuliers, une sous-structure isomorphe à l'algèbre d'Ihara et une autre isomorphe à l'algèbre dite de renormalisation, il serait absurde de parler ici d'*équivalence* [19]. Outre son

---

[18] On omet souvent l'indice inférieur vu que $V^{\omega_1,\dots,\omega_r}_{\omega_0} \equiv 0$ si $\omega_1 + \dots \omega_r \neq \omega_0$

[19] Dans un récent exposé Bourbaki [Cartier2000], il est dit que l'algèbre ARI est équivalente à l'algèbre d'Ihara. C'est inexact car en fait elle correspond à la sous-algèbre de ARI constituée des bimoules constants en $\mathbf{v}$, entiers en $\mathbf{u}$, bialternaux et pairs, i.e. une partie infime de ARI. Plus grave encore, cette partie ne contient aucun des bimoules spéciaux indispensables a l'intelligence des multizêtas. D'autre part, s'agissant de la méromorphie de $\zeta(s_1,\dots,s_r)$, ce même exposé Bourbaki suggère une démarche inutilement compliquée. Il laisse même planer un doute sur l'exactitude du résultat, pourtant connu depuis fort longtemps. On en trouvera une démonstration simple (exposée en avril 2000 Luminy, au colloque polylogarithmes, valeurs multiztas, et conjecture de Deligne-Ihara), à la page 10 de cet article

antériorité, ARI est incomparablement plus vaste que ces deux algèbres [20] et elle en diffère radicalement par son double jeu [21] de variables u_i, v_i et ses multiples involutions, par quoi elle se prête si bien à l'étude de la dimorphie.

Quelques particularités de ARI/GARI et de la structure ambiante AXI/GAXI.

1) Abondance d'opérations (binaires et unaires) authentiquement indépendantes – contrairement à ce qui se passe dans beaucoup de structures réputées 'doubles', par exemple les bigèbres usuelles, où le co-produit est en fait rigidement induit par le produit.

2) Abondance d'involutions non-triviales (*swap, slap, clap*) respectant *ari/gari*, tout au moins sur des sous-algèbres/sous-groupes adaptés.

3) Clôture finie des opérations : bien qu'authentiquement indépendantes, ces opérations engendrent une famille finie. Exemple important : même là où le *swap* n'est pas un isomorphisme exact, le défaut d'isomorphie peut se mesurer par des opérations qui ne font pas sortir de la structure [22].

4) Mélange de structures libres et liées : les principales sous-structures (e.g. *polaires* ou *entières* etc) de ARI/GARI mêlent typiquement une partie *libre* et une partie fortement *liée*, en général bien moindre. [23]

5) Parmi toutes les opératons AXI/GAXI passées en revue à la section §9 et qui, ensemble, constituent le *champ clos* de ce que j'appelle la *structure de flexion* (cf [E6]), trois seulement, à savoir l'action *arit* et les crochets *limu* et *ari* , conservent une *symétrie simple* – l'alternalité – et sur ces trois, seule la dernière, le crochet *ari*, conserve une double symétrie : la bialternalité $\underline{al}/\underline{al}$ ou sa variante $\underline{al}/\underline{il}$.[24]. C'est cette propriété qui, en dernière analyse, fait de ARI/GARI l'instrument incontournable dans l'étude des multizêtas.

Vocation de ARI/GARI.

Même si l'on manque encore de recul, il semble bien que la vocation véritable de ARI/GARI soit, contrairement à ce que suggère la chronologie, *d'abord* l'étude de la dimorphie (numérique et fonctionnelle, cf §25) et *ensuite* celle des perturbations singulières. L'opposition est d'ailleurs moins tranchée qu'il n'y paraît, car la plupart des monômes/moniques qui servent à la description des perturbations singulières s'insèrent naturellement dans des familles de monômes/moniques dimorphes.

---

[20] surtout l'algèbre d'Ihara, dans laquelle il est impossible de définir ne fût-ce qu' *un seul* des quelque soixante moules spéciaux indispensables à la description des multizêtas.

[21] faute de ce double jeu, ni l'algèbre d'Ihara ni l'algèbre de renormalisation ne permettent d'aborder l'étude des *multizêtas modulés*, par exemple *euleriens*.

[22] cf les formules (72)-(76)

[23] et souvent isomorphe à une algèbre d'opérateurs différentiels ou à un groupe de difféomorphismes formels

[24] du moins au niveau des algèbres, mais la même situation prévaut au niveau des groupes, avec *symétral* à la place de *alternal* et *symétril* à la place de *alternil*

Complexité de ARI/GARI.
La complexité de ARI/GARI (qu'il s'agisse des opérations de base, des structures satellites, des bimoules fondamentaux, etc) est considérable. Ainsi, pour une longueur r donnée, la formule qui donne l'inverse *invgari* dans GARI ou l'exponentielle de Lie *expari* de ARI dans GARI comporte un nombre de termes (noté #) en augmentation très rapide et dont chacun remplit à lui seul une ligne ou demie-ligne :

longueur r	1	2	3	4	5	6	7	8	...
#(invgari)	1	4	20	112	672	4 224	27 459	183 040	...
#(expari)	1	4	21	126	818	5 594	39 693	289 510	...

Pour $r = 8$, on obtient déjà des nombres à six chiffres et il faudrait une centaine de pages pour écrire les formules correspondantes. Cette complexité force souvent à recourir au calcul sur ordinateur pour l'exploration de ARI/GARI. Tout au moins est-ce une tentation constante.... Mais il y a cette contrepartie : le domaine ARI/GARI est si fortement structuré qu'il donne beaucoup de prise à l'intuition et que toute loi ou formule nouvelle, sitôt observée ou intuitée, cède très vite à la démonstration.

11. Application aux multizêtas : les trois niveaux de difficulté

Les multizêtas et surtout leurs fonctions génératrices se présentent sous la forme de *moules* et même de *bimoules*, puisque ces fonctions dépendent en fait de deux séries de variables, les u_j et les v_j, en interaction étroite. Or les bimoules et les opérations qui décrivent l'interaction des u_j et v_j constituent précisément la structure ARI/GARI, qui se trouvait ainsi comme préadaptée à la problématique des multizêtas et de la dimorphie en général. Son irruption, en Août 1999, dans un domaine où l'on ne disposait d'aucun outil comparable et où la recherche marquait le pas, a aussitôt débloqué la situation, nous donnant très vite la *libre génération*, la *dépendance en* π^2, et nous orientant vers le sujet, plus ardu et plus ramifié, de la décomposition canonique en irréductibles.

On peut sans trop d'artifice distinguer trois niveaux de complexité dans l'étude des multizêtas .

Niveau 1 : C'est en gros celui où l'on prend en compte l'une ou l'autre des familles de relations quadratiques, mais *isolément*, avec tout au plus quelques 'traces' de l'autre famille (propriétés faibles d'invariance ou de parité). En termes de structure, on a ici affaire à des sous-algèbres ou sous-groupes *primaires* de ARI/GARI, caractérisés chacun par un système de contraintes – le "groupe sous-jacent" – qui ici est toujours *fini.* Quant aux *bimoules primaires* que l'on manie à ce niveau, ils sont très nombreux mais restent relativement élémentaires.

Niveau 2 : Ici, les deux familles de relations quadratiques interagissent à plein avec, au niveau des fonctions génératrices, un 'pont' qui les relie : c'est l'involution *swap*, qui échange les u_j et les v_j, les sommes et les différences, $Zag^\bullet$ et $Zig^\bullet$, etc. Dès lors, la plupart de nos objets vont aller par paires (marquées par l'alternance vocalique a/i, parfois u/i) et vont aussi s'étudier par paires. Ce serait plutôt une source de simplification, mais toute relative, car on doit maintenant affronter des sous-structures *secondaires* de ARI/GARI, aux *groupes sous-jacents* (de contraintes) *infinis*, ce qui bien sûr engendre un tout autre niveau de complexité et interdit en particulier d'appliquer le théorème de Hilbert sur les bases d'invariants. Quant aux *bimoules secondaires* qui règnent à ce niveau, à commencer par la paire 'polaire' $pal^\bullet/pil^\bullet$ et la paire 'trigonométrique' $tal^\bullet/til^\bullet$, tous cumulent deux "symétries" (ils sont par exemple de type *symétral* et leur *swappé* est aussi de type *symétral* ou d'un type apparenté) qui justement "ont du mal à co-exister", ce qui les détermine assez rigidement et surtout fait d'eux des objets extrêmement riches (– riches en structure, en propriétés, en "lieux naturels de manifestation" –) mais aussi, hélas, très complexes. Heureusement, ces bimoules secondaires n'interviennent presque jamais *directement*, avec toute leur irréductible complexité, mais le plus souvent par le biais de bimoules dérivés (qui mesurent leur défaut de parité, ou de commutation, ou leur interaction avec le *swap*, etc) et qui, eux, sont de tout autre nature : *primaires* et *élémentaires*. Parmi les faits qui se démontrent à ce "niveau 2" citons le théorème de 'libre génération' (qui à vrai dire n'utilise qu'une infime partie de l'appareil) et le théorème sur les 'dimensions' (qui en requiert davantage).

Niveau 3 : Les moules $pal^\bullet/pil^\bullet$ et $tal^\bullet/til^\bullet$ contiennent presque toute l'information sur la dépendance des multizêtas en π^2 , mais lorsqu'on aborde leur décomposition canonico-explicite en irréductibles (autres que π^2) la complexité augmente encore d'un cran. On voit ainsi s'introduire des moules 'arithmétiques' d'un type bien particulier : ils ont des indices n_i entiers et dépendent fortement des développements (finis) en fraction continue des rapports n_i/n_j. Apparaîssent aussi d'autres phénomènes inédits, comme la 'symétrie centrale'*polaire-plat* signalée dans [E5]. Même si l'existence, que rien ne garantissait a priori, d'une base *canonique* d'irréductibles est aujourd'hui acquise et qu'on dispose même de formules passablement explicites pour décomposer les multizêtas dans cette base, il existe bien des degrés dans l'explicite et l'optimum est sans doute loin d'être atteint. La plupart des interrogations se concentrent actuellement[25] sur un bimoule particulier, $loma^\bullet/lomi^\bullet$, à valeurs dans l'espace des fonctions multiméromorphes, et

[25] en fait, ces interrogations ont entretemps trouvé réponse : cf §28-§32 *infra* et [E6].

plus spécialement sur ses multirésidus, qui devraient pouvoir s'exprimer par une formule close.Voir §22.

12. Les bimoules bisymétrals $pal^\bullet/pil^\bullet$ et $tal^\bullet/til^\bullet$

Rappelons que $P(t) := 1/t$ et $Q(t) := c/\tan(ct)$ pour un $c \in \mathbb{C}^*$ fixé.

Les bimoules alternals $pa_r^\bullet, pi_r^\bullet, ta_r^\bullet, ti_r^\bullet$ ont toutes leurs composantes nulles, sauf celle de longueur r. Ils sont tous les quatre définis par la même récurrence

$$M_r^\bullet := \mathrm{garit}(M_{r-1}^\bullet).M_1^\bullet \tag{56}$$

garit désignant bien sûr l'action de GARI dans BIMU. Vu l'extrême simplicité de $M_1^\bullet$, chacune de ces relations se réduit à deux termes :

$$M_r^{\binom{u_1\ ,\dots,\ u_r}{v_1\ ,\dots,\ v_r}} := M_{r-1}^{\binom{u_1\ ,\dots,\ u_{r-1}}{v_{1:r}\ ,\dots,\ v_{r-1:r}}} M_1^{\binom{u_r}{v_r}} - M_1^{\binom{u_1}{v_1}} M_{r-1}^{\binom{u_2\ ,\dots,\ u_r}{v_{2:1}\ ,\dots,\ v_{r:1}}} \tag{57}$$

Toute la différence est donc dans le choix du bimoule initial :

$$M_1^{w_1} := P(u_1)\,;\ P(v_1)\,;\ Q(u_1)\,;\ Q(v_1)\ \text{ respectivement} \tag{58}$$

$$M_1^{w_1,\dots,w_r} := 0\ \ si\ \ r \neq 1 \tag{59}$$

Le mode de construction garantit l'alternalité de ces quatre familles $M_r^\bullet$ mais conduit à des résultats nettement différents selon les cas.

Primo, les bimoules $pa_r^\bullet, ta_r^\bullet$ dépendent des seules variables u_j et $pi_r^\bullet, ti_r^\bullet$ dépendent des seules variables v_j .

Secundo, les $pa_r^\bullet$ et $pi_r^\bullet$ sont fortement liés dans ARI, puisqu'ils vérifient

$$\mathrm{ari}(\mathrm{pa}_{r_1}^\bullet, \mathrm{pa}_{r_2}^\bullet) = (r_1 - r_2)\,\mathrm{pa}_{r_1+r_2}^\bullet \tag{60}$$

$$\mathrm{ari}(\mathrm{pi}_{r_1}^\bullet, \mathrm{pi}_{r_2}^\bullet) = (r_1 - r_2)\,\mathrm{pi}_{r_1+r_2}^\bullet \tag{61}$$

alors que les $ta_r^\bullet$ et $ti_r^\bullet$ ne vérifient ces relations que *modulo* c^2 mais que, pris exactement, ils sont *libres* dans ARI.

Tertio, bien que les fonctions $pa_r^{\mathbf{w}}$ et $pi_r^{\mathbf{w}}$ soient évidemment chacune homogènes de degré total $-r$ en leurs variables (u_j ou v_j) et se correspondent par une involution spéciale propre aux bimoules polaires, le *slap* , comme fonctions rationnelles elles sont de degrés très différents (respectivement r^2 et $r+2$) et seule $pi_r^{\mathbf{w}}$ admet une expression directe simple :

$$\mathrm{pi}_r^{w_1,\dots,w_r} := (v_1 + v_2 + \cdots + v_r)\,P(v_1)\,P(v_{1:2})\,P(v_{2:3}) \\ \dots P(v_{r-1:r})\,P(v_r) \tag{62}$$

Quarto, seuls trois des quatre familles, $pa_r^\bullet, pi_r^\bullet, ti_r^\bullet$, mais pas $ta_r^\bullet$, possèdent l'importante propriété de *séparativité*, qui signifie que sous l'action de l'opérateur

$$\mathrm{separ}(A^\bullet) := \mathrm{swap}(A^\bullet) + \mathrm{anti} \circ \mathrm{swap}(A^\bullet) \tag{63}$$

leurs variables se 'séparent'. Ainsi :

$$\text{separ}(\text{pa}_r)^{w_1,\dots,w_r} = (r+1)\,P(v_1)\dots P(v_r) \tag{64}$$

$$\text{separ}(\text{pi}_r)^{w_1,\dots,w_r} = (r+1)\,P(u_1)\dots P(u_r) \tag{65}$$

Les relations (60),(61) signifient que les sous-algèbres ARI_{pa} et ARI_{pi} de $\text{ARI}_{\text{al}} \subset \text{ARI}$ engendrées par les $pa_r^\bullet$ ou les $pa_r^\bullet$ sont isomorphes entre elles et avec l'algèbre ORO engendrée par les opérateurs différentiels ordinaires $t^{r+1}\partial_t$. Par exponentiation de Lie, ces isomorphismes d'algèbre induisent des isomorphismes entre les sous-groupes :
(i) $\text{GARI}_{\text{pa}} := \text{expari}(\text{ARI}_{\text{pa}}) \subset \text{GARI}_{\text{as}} \subset \text{GARI}$,
(ii) $\text{GARI}_{\text{pi}} := \text{expari}(\text{ARI}_{\text{pi}}) \subset \text{GARI}_{\text{as}} \subset \text{GARI}$
et le groupe :
(iii) $\text{GORO} := \exp(\text{ORO})$
des difféomorphismes formels tangents à l'identité $t \mapsto t + \sum_1^\infty c_r t^{r+1}$ de $\mathbb{C}_{,0}$ dans lui-même [26]

Particulièrement importantes pour notre propos sont les images $par^\bullet \in \text{GARI}_{\text{pa}}$ et $pil^\bullet \in \text{GARI}_{\text{pi}}$ du difféomorphisme $f \in \text{GORO}$ défini par $f(t) := 1 - e^{-t}$. Comme tous les éléments de GARI_{pa} ou GARI_{pi} , les bimoules $par^\bullet$ et $\text{pil}^\bullet$ sont évidemment symétrals, mais ils possèdent une propriété remarquable et inattendue : leurs swappés $pir^\bullet := swap(par^\bullet)$ et $pal^\bullet := swap(pil^\bullet)$ sont eux-aussi symétrals.

Les bimoules bisymétrals $\text{pal}^\bullet/\text{pil}^\bullet$ *et* $\text{par}^\bullet/\text{pir}^\bullet$ *ainsi construits sont une des clefs de voûte de la théorie.* Ils *ne vérifient pas* la condition subsidiaire de parité et donc *n'appartiennent pas* à $\text{GARI}_{\underline{\text{as/as}}}$ mais seulement à $\text{GARI}_{\text{as/as}}$. En fait, cette propriété de bisymétralité et d'imparité les *caractérise* au sein de GARI_{pa} et GARI_{pi} et même, moyennant quelques conditions supplémentaires très naturelles, dans l'absolu.

La paire $pal^\bullet/pil^\bullet$ est au demeurant plus importante que la paire $par^\bullet/pir^\bullet$. Contrairement à celle-ci, elle possède un analogue 'trigonométrique' $tal^\bullet/til^\bullet$, obtenu en remplaçant P par Q et en ajoutant des termes correctifs pairs en c. Le bimoule $til^\bullet$ est d'ailleurs l'exponentielle de Lie d'un élément de l'algèbre ARI_{ti} engendrée par les $ti_r^\bullet$.

Ces bimoules bisymétrals possèdent un nombre inimaginable de propriétés remarquables et occupent le centre de tout un cortège de *'bimoules spéciaux'*, qui sont décrits dans [E5] et dont les applications débordent la théorie des multizêtas. A notre avis, *they are there to stay !*

Ajoutons que, même si ces moules bisymétrals sont, pris en eux-mêmes, d'une redoutable complexité, leurs principales propriétés – celles qui importent directement pour les applications aux multizêtas – s'établissent

[26] à proprement parler, ARI_{pa} et ARI_{pi} sont anti-isomorphes à ORO, tandis que $GARI_{pa}$ et $GARI_{pi}$ sont directement isomorphes à $GORO$

facilement et presque sans calculs à partir du phénomène de *séparativité* et en utilisant l'équivalent multiplicatif *ssepar* de l'opérateur *separ* :

$$\text{ssepar}(A^\bullet) := \text{mu}(\text{anti} \circ \text{swap}(A^\bullet), \text{swap}(A^\bullet)) \tag{66}$$

13. Isomorphie explicite des cinq algèbres secondaires

Une première conséquence est celle-ci : les sous-espaces de ARI notés

$$\text{ARI}_{\underline{\text{al/al}}}\ ;\ \text{ARI}_{\underline{\text{al/il}}}\ ;\ \text{ARI}_{\underline{\text{al/ul}}}\ ;\ \text{ARI}_{\underline{\text{al/iil}}}\ ;\ \text{ARI}_{\underline{\text{al/uul}}}\ ; \tag{67}$$

et constitués des bimoules
(i) alternals
(ii) de *swappé* respectivement alternal/il/ul/iil/uul
(iii) vérifiant la *'condition de parité subsidiaire'* (i.e. de composante initiale paire)
constituent cinq sous-algèbres isomorphes de ARI, reliées par des isomorphismes canoniques et explicites, qui d'ailleurs valent aussi pour les sous-groupes correspondants :

$$\text{adari}(\text{pal}^\bullet)\ :\ \text{ARI}_{\underline{\text{al/al}}} \Rightarrow \text{ARI}_{\underline{\text{al/il}}} \tag{68}$$

$$\text{adari}(\text{pil}^\bullet)\ :\ \text{ARI}_{\underline{\text{al/al}}} \Rightarrow \text{ARI}_{\underline{\text{al/ul}}} \tag{69}$$

$$\text{adari}(\text{tal}^\bullet)\ :\ \text{ARI}_{\underline{\text{al/al}}} \Rightarrow \text{ARI}_{\underline{\text{al/iil}}} \tag{70}$$

$$\text{adari}(\text{til}^\bullet)\ :\ \text{ARI}_{\underline{\text{al/al}}} \Rightarrow \text{ARI}_{\underline{\text{al/uul}}} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}
\text{adgari}(\text{pal}^\bullet)\ &:\ \text{GARI}_{\underline{\text{as/as}}} \Rightarrow \text{GARI}_{\underline{\text{as/is}}}\\
\text{adgari}(\text{pil}^\bullet)\ &:\ \text{GARI}_{\underline{\text{as/as}}} \Rightarrow \text{GARI}_{\underline{\text{as/us}}}\\
\text{adgari}(\text{tal}^\bullet)\ &:\ \text{GARI}_{\underline{\text{as/as}}} \Rightarrow \text{GARI}_{\underline{\text{as/iis}}}\\
\text{adgari}(\text{til}^\bullet)\ &:\ \text{GARI}_{\underline{\text{as/as}}} \Rightarrow \text{GARI}_{\underline{\text{as/uus}}}
\end{aligned}$$

où $adari(B^\bullet)$ et $adgari(B^\bullet)$ désignent l'action ajointe de GARI dans ARI et GARI respectivement[27].

La stabilité par crochet de $\text{ARI}_{\underline{\text{al/al}}}$ est une conséquence immédiate de la *push*-invariance des bialternals, mais la stabilité des quatre autres algèbres "secondaires" (i.e. à double symétrie) n'est pas directement évidente : elle résulte des isomorphies (68)-(71).

Celles-ci résultent à leur tour d'une formule générale qui relie les quotients dans GARI à leurs transmutés par le *swap* :

$$\text{swafragari}(A^\bullet, B^\bullet) := \text{ganit}(\text{crash}(B^\bullet)).\text{fragari}(A^\bullet, B^\bullet) \tag{72}$$

[27]Aux deux premières lignes, on pourrait prendre $par^\bullet$ et $pir^\bullet$ à la place de $pal^\bullet$ et $pil^\bullet$

avec

$$\text{fragari}(A^\bullet, B^\bullet) := \text{gari}(A^\bullet, \text{invgari}(B^\bullet)) \tag{73}$$
$$\text{swafragari}(A^\bullet, B^\bullet) := \text{swap}(\text{fragari}(\text{swap}(A^\bullet), \text{swap}(B^\bullet)) \tag{74}$$
$$\text{crash}(B^\bullet) := \text{rash} \circ \text{swap} \circ \text{invgari} \circ \text{swap}(B^\bullet) \tag{75}$$
$$\text{rash}(B^\bullet) := \text{mu}(\text{push} \circ \text{swap} \circ \text{invmu} \circ \text{swap}(\text{B}^\bullet), \text{B}^\bullet) \tag{76}$$

Ici, *ganit* désigne bien sûr l'action de GANI dans BIMU. Ces formules (72)-(76), assez complexes dans le cas général, deviennent très faciles à établir et à utiliser lorsqu'on prend pour $B^\bullet$ l'un des quatre moules bi-symétrals $pal^\bullet/pil^\bullet$ ou $tal^\bullet/til^\bullet$, car alors $rash(B^\bullet)$ et $crash(B^\bullet)$ s'expriment immédiatement à partir des *séparateurs* de $B^\bullet$, eux-mêmes élémentaires. Par exemple

$$\text{crash}(\text{pal}^\bullet) = \text{crash}(\text{par}^\bullet) = \text{pac}^\bullet \tag{77}$$
$$\text{crash}(\text{pil}^\bullet) = \text{crash}(\text{pir}^\bullet) = \text{pic}^\bullet \tag{78}$$
$$\text{crash}(\text{tal}^\bullet) = \text{tac}^\bullet \tag{79}$$
$$\text{crash}(\text{til}^\bullet) = \text{tic}^\bullet \tag{80}$$

avec des bimoules $pac^\bullet$, $pic^\bullet$ ultra-élémentaires

$$\text{pac}^{w_1,w_2,\ldots,w_r} = P(u_1)P(u_2)\ldots P(u_r) \tag{82}$$
$$\text{pic}^{w_1,w_2,\ldots,w_r} = P(v_1)P(v_2)\ldots P(v_r) \tag{83}$$

et des bimoules $tac^\bullet$, $tic^\bullet$ à peine plus complexes, ce qui permet de vérifier sans aucune peine que les actions correspondantes :

$$\text{illa} := \text{ganit}(\text{crash}(\text{pal}^\bullet)) = \text{ganit}(\text{pac}^\bullet) \tag{84}$$
$$\text{ulla} := \text{ganit}(\text{crash}(\text{pil}^\bullet)) = \text{ganit}(\text{pic}^\bullet) \tag{85}$$
$$\text{iilla} := \text{ganit}(\text{crash}(\text{tal}^\bullet)) = \text{ganit}(\text{tac}^\bullet) \tag{86}$$
$$\text{uulla} := \text{ganit}(\text{crash}(\text{til}^\bullet)) = \text{ganit}(\text{tic}^\bullet) \tag{87}$$

transforment la double symétrie $\underline{al/al}$ en $\underline{al/il}$, $\underline{al/ul}$, $\underline{al/iil}$, $\underline{al/uul}$ respectivement.

Vue d'ensemble.[28]

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{ARI}^{\mathrm{nepush}} & \supset & \mathrm{ARI}^{\mathrm{nepush}}_{\mathrm{al}/\bullet} & \overset{\mathrm{swap}}{\underset{\mathrm{swap}}{\rightleftarrows}} & \mathrm{ARI}^{\mathrm{nepush}}_{\bullet/\mathrm{al}} & \subset & \mathrm{ARI}^{\mathrm{nepush}} \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
\mathrm{ARI}^{\mathrm{nepush}}_{\bullet/\mathrm{al}} & \supset & \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/al}}} & \overset{\mathrm{swap}}{\underset{\mathrm{swap}}{\rightleftarrows}} & \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/al}}} & \subset & \mathrm{ARI}^{\mathrm{nepush}}_{\mathrm{al}/\bullet} \\
\Downarrow \mathrm{adari(pal^\bullet)} & & \Downarrow \mathrm{adari(pal^\bullet)} & & \Downarrow \mathrm{adari(pil^\bullet)} & & \Downarrow \mathrm{adari(pil^\bullet)} \\
\mathrm{ARI}^{\mathrm{nepushu}}_{\bullet/\mathrm{il}} & \supset & \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/il}}} & \overset{\mathrm{uswapi}}{\underset{\mathrm{iswapu}}{\rightleftarrows}} & \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/ul}}} & \subset & \mathrm{ARI}^{\mathrm{nepushi}}_{\mathrm{al}/\bullet} \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
\mathrm{ARI}^{\mathrm{nepushu}} & \supset & \mathrm{ARI}^{\mathrm{nepushu}}_{\mathrm{al}/\bullet} & \overset{\mathrm{uswapi}}{\underset{\mathrm{iswapu}}{\rightleftarrows}} & \mathrm{ARI}^{\mathrm{nepushi}}_{\bullet/\mathrm{ul}} & \subset & \mathrm{ARI}^{\mathrm{nepushi}}
\end{array}
$$

14. La 'libre génération' des multizêtas

Le $\mathbb{Q}$-anneau $\mathbb{Z}$eta *des multizêtas formels, ainsi que les trois anneaux-facteurs I,II,III en quoi il se résout (cf §15), sont des anneaux polynômiaux : ils sont librement engendrés sur $\mathbb{Q}$ par un système dénombrable d'irréductibles. Ceci vaut tant pour les multizêtas* purs *que pour les multizêtas* modulés.

C'est le théorème de *libre génération.* S'il a longtemps résisté, c'est qu'on cherchait à l'attaquer avec des outils inadéquats (algèbre d'Ihara, etc). Mais il s'agit en réalité d'un résultat très simple[29], le seul point un peu délicat consistant à établir la stabilité pour le crochet *ari* de l'espace $\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$ des bimoules de type alternal/alternil (avec la condition de parité subsidiaire, dénotée par le soulignement : voir supra). La preuve la plus directe (mais il en existe plusieurs variantes) consiste à partir de la sous-algèbre $\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ des bialternals, (c'en est une, trivialement, du fait de la *push*-invariance des bialternals) puis à utiliser l'un ou l'autre des isomorphismes explicites construits à la section précédente :

$$\text{(88)} \qquad \mathrm{adari}(\mathrm{pal}^\bullet) \; \textit{ou} \; \mathrm{adari}(\mathrm{par}^\bullet) : \qquad \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/al}}} \Rightarrow \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$$

Mais prenons garde à ceci : bien que cet isomorphisme nous garantisse que $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$ *est bien* une sous-subalgèbre, comme intersection des sous-algèbres $\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$ et $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}}$ (algèbre des bimoules "entiers", i.e. à valeurs dans l'anneau des séries entières), il n'échange pas les sous-algèbres $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$

---

[28]Dans ce tableau, les indices *nepush* (resp. *nepushi, nepushu*) signalent l'invariance par rapport au produit de *neg* et *push* (resp. de variantes adaptées).

[29] même si ce genre de confidences peut paraître déplacé, je signalerai que le théorème de *libre génération* m'a coûté environ cinquante fois moins de travail et de temps que l'élucidation complète de la *décomposition canonico-explicite en irréductibles.* Je crois que ceci reflète assez exactement le rapport des difficultés.

et $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$. Et d'ailleurs il ne le pourrait pas, car ces sous-algèbres *ne sont pas* isomorphes.

On obtient alors la paire symétrale/symétrile $zag^\bullet/zig^\bullet$ la plus générale en partant d'une paire *particulière* (par exemple la paire $Zag^\bullet/Zig^\bullet$ construite à partir des 'vrais' multizêtas) et en la postcomposant (dans GARI) par l'élément *général* de $\mathrm{GARI}^{\mathrm{ent}/\#}_{\underline{\mathrm{as/is}}} = \mathrm{expari}(\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\#}_{\underline{\mathrm{al/il}}})$. Ici, *ent* signifie comme d'habitude *à valeurs dans l'anneau des séries entières* et # renvoie à une condition supplémentaire qui dépend de l'anneau de multizêtas qu'on étudie : ainsi, pour les multizêtas purs, # signifie banalement : *constant en les variables* $\mathbf{v}$, et donc *de swappé constant en les variables* $\mathbf{u}$. Pour les multizêtas modulés, voir §16.

La factorisation ci-dessus a pour vertu de complètement linéariser le problème et de montrer que le $\mathbb{Q}$-anneau $\mathbb{Z}$eta des multizêtas est *librement engendré* par π^2 (attaché au facteur gauche) et par une infinité dénombrable d'*irréductibles*, qui sont en correspondance biunivoque avec les générateurs linéaires de $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\#}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$ pris comme *espace vectoriel.*

Mais en tant qu'*algèbre de Lie*, $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\#}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$ porte beaucoup plus de structure que le $\mathbb{Q}$-anneau $\mathbb{Z}$eta des multizêtas formels, ce qui permet d'analyser plus avant ses *générateurs linéaires* et de tout ramener à un nombre bien moindre de *générateurs de Lie.* Il faut donc quitter les scalaires 'inertes' – qu'il s'agisse des scalaires numériques ou des formels – et se tourner vers les structures (ARI/GARI etc) où vivent naturellement les fonctions génératrices fabriquées à partir des scalaires. C'est avec ce changement d'optique – et l'affinement du seuil de 'résolution' qu'il apporte – que *commence* l'étude véritable des multizêtas.

15. Bipartition immédiate et tripartition coûteuse

Comme élément de GARI, le moule $zag^\bullet$ se scinde en deux et même trois facteurs :

$$\mathrm{zag}^\bullet = \mathrm{gari}(\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{I+II}}, \mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{III}}) \qquad (\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{III}} \in \mathrm{GARI}^{\mathrm{o.l.}}_{\underline{\mathrm{as/is}}}) \tag{89}$$

$$\mathrm{zag}^\bullet = \mathrm{gari}(\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{I}}, \mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{II}}, \mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{III}}) \qquad (\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{II}} \in \mathrm{GARI}^{\mathrm{e.l.}}_{\underline{\mathrm{as/is}}}) \tag{90}$$

Les facteurs $zag^\bullet_I$, $zag^\bullet_{II}$, $zag^\bullet_{I+II}$ sont de type "e.l.", i.e. leurs composantes de longueur r paire/impaire sont des fonctions paires/impaires de $\mathbf{w}$. Le facteur $zag^\bullet_{III}$ est de type "o.l.", i.e. ses composantes de longueur r paire/impaire sont des fonctions impaires/paires de $\mathbf{w}$. L'isomorphisme d'algèbre (68) (ou plus exactement, son inverse) change les bimoules de type "e.l." (resp. "o.l."), qui ont de multiples composantes non-nulles, en des bimoules bialternals, et donc nécessairement pairs en $\mathbf{w}$, mais réduits à une unique composante non-nulle, non-entière, et de longueur paire (resp. impaire). [30]. D'où les abréviations e.l. (even-lengthed) et o.l. (odd-lengthed).

Mais il y a une différence profonde entre (89) et (90). La première factorisation est élémentaire, immédiate à obtenir et indiscutablement canonique, avec un facteur $zag^\bullet_{III}$ donné par :

$$\text{(91)} \qquad \mathrm{gari}(\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{III}}, \mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{III}}) = \mathrm{gari}(\mathrm{nepar}(\mathrm{invgari}(\mathrm{zag}^\bullet)), \mathrm{zag}^\bullet)$$

où *nepar* désigne l'automorphisme élémentaire de ARI/GARI :

$$\text{(92)} \qquad \mathrm{nepar} := \mathrm{neg} \circ \mathrm{pari} : \qquad A^{\left(\begin{smallmatrix} u_1 & ,\dots, & u_r \\ v_1 & ,\dots, & v_r \end{smallmatrix}\right)} \mapsto (-1)^r A^{\left(\begin{smallmatrix} -u_1 & ,\dots, & -u_r \\ -v_1 & ,\dots, & -v_r \end{smallmatrix}\right)}$$

Tout élément de GARI possédant exactement une racine carrée, (91) détermine $zag^\bullet_{III}$ puis (89) détermine $zag^\bullet_{I+II}$ par division.

La seconde factorisation (90), plus précise, consiste à 'détacher' π^2 , autrement dit à démêler le facteur $zag^\bullet_{I}$, porteurs des seules puissances de π^2, du facteur $zag^\bullet_{II}$, porteur d'une infinité d'irréductibles 'de longueur paire'. Le point délicat n'est d'ailleurs pas tant d'établir l'*existence* d'une telle factorisation, mais d'assurer sa *canonicité*, grâce à la notion de *kwa*-orthogonalité : voir §19 infra.

Ces factorisations valent non seulement dans le cadre *formel*, mais aussi dans le cadre *numérique*. Elles livrent donc deux décompositions du $\mathbb{Q}$-anneau des 'vrais' multizêtas, l'une immédiate, la seconde plus cachée :

$$\text{(93)} \qquad \mathbb{Z}\mathrm{eta} \;=\; \mathbb{Z}\mathrm{eta}_{\mathrm{I+II}} \otimes \mathbb{Z}\mathrm{eta}_{\mathrm{III}}$$

$$\text{(94)} \qquad \mathbb{Z}\mathrm{eta} \;=\; \mathbb{Z}\mathrm{eta}_{\mathrm{I}} \otimes \mathbb{Z}\mathrm{eta}_{\mathrm{II}} \otimes \mathbb{Z}\mathrm{eta}_{\mathrm{III}} \qquad \textit{avec} \qquad \mathbb{Z}\mathrm{eta}_{\mathrm{I}} = \mathbb{Q}[\pi^2]$$

L'anneau $\mathbb{Z}\mathrm{eta}_{\mathrm{III}}$ (resp. $\mathbb{Z}\mathrm{eta}_{\mathrm{I+II}}$) est engendré par tous les *irréductibles* de longueur impaire (resp. par ceux de longueur paire, à quoi il faut ajouter l'irréductible 'complètement à part' $\zeta(2) = \pi^2/6$).

Remarque : Formule de conversion.
La règle de conversion (38) pour passer de $zag^\bullet$ à $zig^\bullet$ utilisait la multiplication *mu*, très simple mais étrangère à GARI. Cependant, le moule $mana^\bullet$ est si spécial (il appartient au centre de GARI), que l'on peut re-écrire (38) en termes des seules opérations de GARI :

$$\mathrm{swap}(\mathrm{zig})^\bullet = \mathrm{gari}(\mathrm{zag}^\bullet, \mathrm{mana}^\bullet) = \mathrm{gari}(\mathrm{mana}^\bullet, \mathrm{zag}^\bullet)$$

Remarque : Factorisations de $invzag^\bullet$.
Le bimoule $invzag^\bullet$, inverse de $zag^\bullet$ dans GARI, est de type symétral/symétriil (attention au double *i* : *symétriil* est le type de symétrie 'périodisé' de *symétril* ; cf §5) et admet des factorisations analogues d'aspect à (89)(90),

[30]ceci ne vaut bien sûr que pour les facteurs $\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{II}}$ et $\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{III}}$ et non pour le facteur $\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{I}}$, qui est dans $\mathrm{GARI}^{\mathrm{e.l.}}_{\mathrm{as/is}}$ mais pas dans $\mathrm{GARI}^{\mathrm{e.l.}}_{\underline{\mathrm{as/is}}}$

mais en réalité fort différentes et *ne s'en déduisant pas par inversion dans GARI* :

$$\begin{aligned} \mathrm{invzag}^\bullet &= \mathrm{gari}(\mathrm{vizag}^\bullet_{\mathrm{I+II}}, \mathrm{vizag}^\bullet_{\mathrm{III}}) \qquad (\mathrm{vizag}^\bullet_{\mathrm{III}} \in \mathrm{GARI}^{\mathrm{o.l.}}_{\underline{\mathrm{as/iis}}}) \\ \mathrm{invzag}^\bullet &= \mathrm{gari}(\mathrm{vizag}^\bullet_{\mathrm{I}}, \mathrm{vizag}^\bullet_{\mathrm{II}}, \mathrm{vizag}^\bullet_{\mathrm{III}}) \qquad (\mathrm{vizag}^\bullet_{\mathrm{II}} \in \mathrm{GARI}^{\mathrm{e.l.}}_{\underline{\mathrm{as/iis}}}) \end{aligned}$$

Ces factorisations jouent un grand rôle dans la synthèse canonique explicite.

16. Décompte des irréductibles : les conjectures de Broadhurst-Kreimer

Les conjectures BK.
Considérons conjointement les *multizêtas purs* (sans racines de l'unité) et les *multizêtas euleriens* (i.e. modulés par les racines ± 1) – les premiers à cause de leur importance manifeste ; les seconds parce qu'en dépit des apparences ils sont nettement plus *simples* à étudier. Soit $P_{s,r}$ (resp. $E_{s,r}$) le plus petit nombre d'irréductibles de longueur r et de poids total s ($:= s_1 + \ldots + s_r$) requis pour produire un système complet d'irreductibles pour les multizêtas purs (resp. euleriens).

Par une extrapolation théorique ingénieuse de données numériques très précises, Broadhurst et Kreimer ont conjecturé que les dimensions $P_{s,r}$ and $E_{s,r}$ relatives aux 'vrais' multizêtas pouvaient se lire sur les fonctions génératrices suivantes [31] :

$$\prod_{s\geq 3, r\geq 1} (1-x^s y^r)^{P_{s,r}} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{x^3 y}{1-x^2} + \frac{x^{12} y^2 (1-y^2)}{(1-x^4)(1-x^6)} \tag{95}$$

$$\prod_{s\geq 3, r\geq 1} (1-x^s y^r)^{E_{s,r}} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{x^3 y}{(1-x^2)(1-xy)} \tag{96}$$

Algèbres autocorrélées.
Nous nous intéressons quant à nous aux irréductibles des multizêtas *formels* – mais tout porte à penser qu'ils coïncident avec ceux des vrais multizêtas. Les algèbres pertinentes dans ce contexte sont les suivantes. Pour tout $p \geq 1$ soit $\mathbb{Z}_p$ le sous-groupe $\{0, 1/p, \ldots, (p-1)/p\}$ de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ et soit $\mathrm{ARI}^{\underline{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_p}}$ la sous-algèbre de ARI (c'en est une !) qui regroupe tous les bimoules $A^\bullet$:
(i) de variables $\mathbf{u}$ parcourant $\mathbb{C}$
(ii) de variables $\mathbf{v}$ parcourant $\mathbb{Z}_p$
(iii) à valeurs dans l'espace des séries formelles en $\mathbf{u}$

[31] prises sous forme de produits d'un type fréquemment utilisé pour calculer les dimensions des composantes homogènes des algèbres de Lie

(iv) sujets aux contraintes dites d'autocorrélation[32] :

$$A^{\left(\begin{smallmatrix} u_1 & ,\dots, & u_r \\ qv_1 & ,\dots, & qv_r \end{smallmatrix}\right)} \equiv \sum_{qv_i^*=qv_i} A^{\left(\begin{smallmatrix} qu_1 & ,\dots, & qu_r \\ v_1^* & ,\dots, & v_r^* \end{smallmatrix}\right)} \qquad (\forall\, q \mid p) \tag{97}$$

et donc en particulier (pour $q = p$) :

$$A^{\left(\begin{smallmatrix} u_1 & ,\dots, & u_r \\ 0 & ,\dots, & 0 \end{smallmatrix}\right)} \equiv \sum_{v_i^*\in\mathbb{Z}_p} A^{\left(\begin{smallmatrix} qu_1 & ,\dots, & qu_r \\ v_1^* & ,\dots, & v_r^* \end{smallmatrix}\right)} \tag{98}$$

Les structures à envisager pour l'étude des multizêtas modulés par des racines de l'unité d'ordre p sont :

(i) la sous-algèbre $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_p}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$, tendue par les alternals/alternils, lesquels sont en relation directe avec les irréductibles

(ii) la sous-algèbre $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_p}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ tendue par les bialternals. *Certains* d'entre eux (pas tous) se 'prolongent' en des alternals/alternils, mais en sens inverse *tout* alternal/alternil 'commence' par un bialternal. Ces bialternals sont beaucoup plus simples, mais avec cette contrepartie que pour eux la correspondance avec les irréductibles se distend.

(iii) l'idéal $\mathrm{ARI}^{\underline{\mathrm{ent}}/\mathbb{Z}_p}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ des bimoules nuls pour $\mathbf{v} = 0$.

(iv) l'idéal $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\underline{\mathbb{Z}_p}}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ des bimoules de $\mathbf{v}$-moyenne nulle , c'est-à-dire vérifiant :

$$0 \equiv \sum_{v_i} A^{\left(\begin{smallmatrix} u_1 & ,\dots, & u_r \\ v_1 & ,\dots, & v_r \end{smallmatrix}\right)} \qquad (\forall\, u_i) \tag{99}$$

(v) l'idéal $\mathrm{ARI}^{\underline{\mathrm{ent}}/\underline{\mathbb{Z}_p}}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ intersection des deux précédents.

Pour $p = 1$ ces sous-algèbres (resp. idéaux) sont constituées de bimoules qui sont banalement constants en $\mathbf{v}$ (resp. $\equiv 0$).

17. Décompte des irréductibles pour les multizêtas purs

Multizêtas purs et générateurs de $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_1}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$.

(i) *Pour tout* d *pair il existe une paire* $\mathrm{ma}^{\bullet}_{d}/\mathrm{mi}^{\bullet}_{d}$ *de type alternal/alternil, de composante initiale* $\mathrm{ma}^{w_1} := u_1^d$, $\mathrm{ma}^{w_1} := v_1^d$ *et avec au total* d *composantes non-nulles.*

C'est une simple conséquence de l'existence des multizêtas *numériques* et de la factorisation (89) relative à ceux-ci : prendre le facteur III ; puis son logarithme de Lie ; puis pour chaque d regrouper tous les termes de longueur

[32] qui ne font que transposer chez les fonctions génératrices les relations évidentes liant les multizêtas modulés par des racines de l'unité d'ordres divers.

r' et de degré d' avec $r'+d' = 1+d = s =$'poids' des multizêtas numériques associés.

(ii) *On conjecture que les* $\mathrm{ma}^{\bullet}_d$ *engendrent librement* $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_1}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$.

Une conjecture analogue (mais portant sur des multizêtas formels a priori différents, puisque formalisés non pas à partir des *relations quadratiques*, comme ici, mais des *relations gonales*, comme chez Drinfel'd) circule depuis au moins cinq ans, mais elle offre assez peu de prise. On peut heureusement lui en substituer une autre, plus précise et en même temps plus abordable, en raisonnant sur les bialternals. En effet :

Multizêtas simples et générateurs de $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_1}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$.

Nous avons besoin de trois suites entières α, β, γ reliées par $\alpha(d) \equiv \beta(d) + \gamma(d-2)$:

$$\sum \alpha(d)\; x^d := x^6\; (1-x^2)^{-1}\; (1-x^4)^{-1} \tag{100}$$

$$\sum \beta(d)\; x^d := x^6\; (1-x^2)^{-1}\; (1-x^6)^{-1} \tag{101}$$

$$\sum \gamma(d)\; x^d := x^8\; (1-x^4)^{-1}\; (1-x^6)^{-1} \tag{102}$$

et surtout de trois séries de bialternals :

$$\begin{array}{rl} \mathrm{ekma}^{\bullet}_d/\mathrm{ekmi}^{\bullet}_d & d \textit{ pair} \geq 2 \\ \mathrm{doma}^{\bullet}_{d,b}/\mathrm{domi}^{\bullet}_{d,b} & d \textit{ pair} \geq 10,\ 1 \leq b \leq \beta(d) \\ \mathrm{carma}^{\bullet}_{d,c}/\mathrm{carmi}^{\bullet}_{d,c} & d \textit{ pair} \geq 8,\ 1 \leq c \leq \gamma(d) \end{array}$$

de degré total d et à composante non-nulle unique, de longueur respectivement 1,2,4. La définition des deux premières paires est très simple :

$$\mathrm{ekma}^{w_1}_d := u_1^d \;;\; \mathrm{ekmi}^{w_1}_d := v_1^d \tag{103}$$

$$\mathrm{doma}^{w_1,w_2}_{d,b} \;:=\; \mathrm{fa}(u_1,u_2)\; (\mathrm{ga}(u_1,u_2))^{b-1}\; (\mathrm{ha}(u_1,u_2))^{d/2-3b} \tag{104}$$

$$\mathrm{domi}^{w_1,w_2}_{d,b} \;:=\; \mathrm{fi}(v_1,v_2)\; (\mathrm{gi}(v_1,v_2))^{b-1}\; (\mathrm{hi}(v_1,v_2))^{d/2-3b} \tag{105}$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{fa}(u_1,u_2) & := & u_1u_2(u_1-u_2)(u_1+u_2)(2u_1+u_2)(2u_2+u_1) \\ \mathrm{ga}(u_1,u_2) & := & (u_1+u_2)^2u_1^2u_2^2 \quad ; \quad \mathrm{ha}(u_1,u_2) := u_1^2+u_1u_2+u_2^2 \\ \mathrm{fi}(v_1,v_2) & := & v_1v_2(v_1-v_2)(v_1+v_2)(2v_1-v_2)(2v_2-v_1) \\ \mathrm{gi}(v_1,v_2) & := & (v_1-v_2)^2v_1^2v_2^2 \quad ; \quad \mathrm{hi}(v_1,v_2) := v_1^2-v_1v_2+v_2^2 \end{array}$$

La définition de la dernière paire, $carma^{\bullet}/carmi^{\bullet}$, est beaucoup plus indirecte. Observons tout d'abord que les $ekma^{\bullet}_d$ ne sont pas *libres* dans ARI, mais *liés*, pour chaque degré d, par exactement $\gamma(d)$ relations indépendantes de la forme :

$$(106) \qquad \sum_{d_1+d_2=d+2} R_c^{d_1,d_2}\,[\mathrm{ekma}^\bullet_{d_1},\mathrm{ekma}^\bullet_{d_2}] = 0^\bullet \quad (1 \le c \le \gamma(d)\,,\ R_c^{d_1,d_2} \in \mathbb{Q})$$

qui résultent des décompositions :

$$(107) \quad [\mathrm{ekma}^\bullet_{d_1},\mathrm{ekma}^\bullet_{d_2}] = \sum_{1\le b\le\beta(d_1+d_2)} K^b_{d_1,d_2}\ \mathrm{doma}^\bullet_{d_1+d_2,b} \quad (K^b_{d_1,d_2} \in \mathbb{Q})$$

Considérons maintenant les bimoules :

$$(108) \qquad \mathrm{vima}^\bullet_{d,c} := \sum_{d_1+d_2=d+2} R_c^{d_1,d_2}\,[\mathrm{ma}^\bullet_{d_1},\mathrm{ma}^\bullet_{d_2}] \ \neq\ 0^\bullet$$

avec les mêmes $R_c^{d_1,d_2}$ qu'en (106). Par construction :

(a) $\mathrm{vima}^\bullet_{d,c}$ *est de type alternal/alternil*

(b) *possède des composantes de longueur 1,2,3 identiquement nulles*

(c) *possède une première composante non-nulle, de longueur 4, qui, isolée des suivantes, fournit un bimoule bialternal : c'est précisément le bimoule* $\mathrm{carma}^\bullet_{d,c}$ *qu'il nous restait à définir.*

Moyennant quoi la conjecture du précédent alinéa peut être avantageusement remplacée par ces deux-ci :

(i) *Les bimoules* $\mathrm{ekma}^\bullet_d$, $\mathrm{doma}^\bullet_{d,b}$ *et* $\mathrm{carma}^\bullet_{d,k}$ *ne sont liés dans ARI par aucune autre contrainte que les relations (106) et toutes celles qui s'en déduisent.*

(ii) *Conjointement, les bimoules* $\mathrm{ekma}^\bullet_d$ *et* $\mathrm{carma}^\bullet_{d,k}$ *engendrent l'algèbre bialternale* $\mathrm{ARI}\frac{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_1}{\underline{\mathrm{al}/\mathrm{al}}}$*, librement modulo les contraintes (106). En conséquence, le nombre total* $P_{s,r}$ *de bialternals linéairement indépendants de longueur* r *, degré* d *(et poids s :=d+r) est bien celui que donne la formule BK (cf(95)).*

Les énoncés précédents n'ont été démontrés que pour $r \le 7$ $(\forall d)$ et restent *conjecturaux* au-delà. Cependant, si l'on y tient vraiment, il existe un moyen, coûteux mais totalement algorithmique, pour les vérifier jusqu'à toute longueur r_0 donnée (et ce *uniformément* en d!).

Quoi qu'il en soit, et en attendant une preuve pour tout r, les constructions précédentes ont le mérite d'ôter au terme correctif $x^{12}y^2(1-y^2)/((1-x^4)(1-x^6))$ de la formule BK son caractère mystérieux et incongru : l'explication est simplement qu'à chaque bialternal 'manquant' de longueur 2 (il y a "moins de *doma*$^\bullet$/*domi*$^\bullet$ qu'on ne s'y attendrait") répond, par le mécanisme transparent (106) + (107) + (108), un bialternal 'bouche-trou' de longueur 4 (à savoir l'"inattendu" $carma^\bullet/carmi^\bullet$).

18. Décompte des irréductibles pour les multizêtas euleriens

Biélémentals.
Ce sont des bimoules $belam_r^\bullet/belim_r^\bullet$ bialternals, relativement élémentaires, mais qui suffisent à engendrer *presque* tous les autres. Il ne dépendent que de la longueur r de leur unique composante non-nulle et d'une fonction de deux variables $xaxi(w_1) := xa(u_1)\, xi(v_1)$ [33], ou plutôt de la partie paire de $xaxi$. Cette unique composante non-nulle se réduit à une simple superposition :

$$(109)\quad \mathrm{belam}_{r,\,\mathrm{xaxi}}^{w_1,\dots,w_r} = \mathrm{belam}_{r,\,\mathrm{xaxi}}^{\binom{u_1\ ,\dots,\ u_r}{v_1\ ,\dots,\ v_r}}$$
$$:= \sum_{\substack{i,j,m,n\in\mathbb{Z}_{r+1}\\ \dots<i\leq m<j\leq n<\dots}} \mathrm{bel}_r^{i,j;m,n}\ \mathrm{xa}(u_i+u_{i+1}+\dots+u_{j-1})\ \mathrm{xi}(v_m-v_n)\ \equiv$$
$$\sum_{\substack{i,j,m,n\in\mathbb{Z}_{r+1}\\ \dots<i\leq m<j\leq n<\dots}} \frac{1}{2}\ \mathrm{bel}_r^{i,j;m,n}\ \Big(\mathrm{xa}(u_{i\dots j-1})\ \mathrm{xi}(v_{m:n})\ +\mathrm{xa}(u_{j\dots i-1})\ \mathrm{xi}(v_{n:m})\Big)$$

avec un *swappé*

$$(110)\qquad \mathrm{belim}_{r,\mathrm{xaxi}}^\bullet := \mathrm{swap}(\mathrm{belam}_{r,\,\mathrm{xaxi}}^\bullet) \equiv \mathrm{belam}_{r,\,\mathrm{xixa}}^\bullet$$

et des coefficients entiers

$$(111)\quad \mathrm{bel}_r^{i,j;m,n} \equiv \mathrm{bel}_r^{j,i;n,m} := \frac{(-1)^{[m-i]_r+[n-j]_r}\quad [r-1]_r!}{[m-i]_r!\ [n-j]_r!\ [j-m-1]_r!\ [i-n-1]_r!}$$

Ceci appelle quelques explications :

Les formules ci-dessus utilisent la notation *augmentée* ou *cyclique* : on indexe les variables u_i, v_i de la r-ième composante d'un bimoule sur $\mathbb{Z}_{r+1} := \mathbb{Z}/(r+1)\mathbb{Z}$ après addition de deux variables 'redondantes' $u_0 := -u_{1\dots r}$ et $v_0 := 0$. Les inégalités sous le signe $\sum$ sont évidemment relatives à l'ordre cyclique sur $\mathbb{Z}_{r+1}$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}_{r+1}$, $[k]_r$ désigne le représentant de k situé dans $\{0, 1, \dots r\}$.

La formule (67) montre que l'involution *swap* laisse les biélémentals inchangés, à la permutation près de xa et xi. Qui plus est :

(i) les bimoules $belam_{r,\,xaxi}^\bullet$ sont *bialternals*

(ii) ils sont $\equiv 0$ pour toute fonction $xaxi$ impaire ou (ssi $r \geq 2$) semi-constante

---

[33] avec des variables u_1, v_1 parcourant deux groupes abéliens (pas nécessairement les mêmes).

(iii) ils sont $\neq 0$ pour toute fonction $xaxi$ paire et dépendant effectivement de ses deux variables.

(iv) ils engendrent *presque* tous les autres bialternals par le crochet *ari.*

La propriété essentielle – la bialternalité des biélémentals – peut se vérifier directement sur les formules (109)(111) ou encore s'établir sans calcul en observant que $belam_{r,\,xaxi}$ est, à un facteur constant près, égal au bimoule trivialement bialternal $belam_{1,\,xaxi}$ crocheté $r-1$ fois avec le bimoule encore plus trivialement bialternal $I^{\bullet}$, dont la seule composante non-nulle, celle de longueur 1, est $\equiv 1$.

Multizêtas euleriens et générateurs de $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$.

Pour $r=1$ et d pair posons :

(112) $\quad \mathrm{bela}^{w_1}_{1,d} = u_1^d$ (*resp.* $(2^{-d}-1)\,u_1^d)$) *si* $v_1 = 0$ (*resp.* $v_1 = 1/2$)

et pour $r \geq 1$ et d pair posons :

(113) $\mathrm{bela}^{\bullet}_{r,d} := \mathrm{belam}^{\bullet}_{r,\mathrm{xaxi}}$ *avec* $\mathrm{xa}(t) := t^d$; $\mathrm{xi}(0) := 0$; $\mathrm{xi}(1/2) := 1$

(i) *Les bimoules* $\mathrm{bela}^{\bullet}_{r,d}$ *(*$r = 1,2,3\ldots$ *;* $d = 2,4,6\ldots$*) sont tous non-nuls, bialternals, et auto-corrélés.*

(ii) *Ils engendrent librement* une sous-algèbre $\underline{\mathrm{ARI}}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ de $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$.

(iii) *Cette même sous-algèbre est également engendrée par les seuls* $\mathrm{bela}^{\bullet}_{1,d}$ *de longueur* $r=1$ *mais avec adjonction du bimoule extérieur* $I^{\bullet}$.

Ce bimoule $I^{\bullet}$ est extérieur à $\underline{\mathrm{ARI}}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ et à $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$, car non-autocorrélé. Il correspond, chez les multizêtas numériques, à l'irréductible $\log 2 = \mathrm{Ze}^{\binom{1/2}{1}}$ propre au cas eulerien. Mais la convention de normalisation $\mathrm{Ze}^{\binom{0}{1}} := 0$ (au lieu de la valeur attendue : ∞) est incompatible avec la condition d'auto-corrélation, ce qui impose de recourir au générateur 'extérieur' $I^{\bullet}$.

(iv) *La différence* $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/al}}} - \underline{\mathrm{ARI}}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ *est contenue dans l'idéal* $\mathrm{ARI}^{\underline{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ *qui lui-même possède des générateurs très simples.*

Multizêtas et générateurs de $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$.

(i) *Tout bialternal* $\mathrm{bela}^{\bullet}_{r,d}$ *et par suite tout bialternal de* $\underline{\mathrm{ARI}}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ *possède une contrepartie ou 'extension'* $\mathrm{bema}^{\bullet}_{r,d}$*, de type alternal/alternil et auto-corrélé, avec une composante initiale (i.e. la première composante non-nulle, celle de longueur r) égale à l'unique composante non-nulle de* $\mathrm{bela}^{\bullet}_{r,d}$.

(ii) *Ces* $\mathrm{bema}^{\bullet}_{r,d}$ *engendrent librement l'algèbre* $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/il}}}$.

(iii) *Les irreductibles euleriens sont en correspondance biunivoque avec les bialternals qui tendent* $\underline{\mathrm{ARI}}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$. *Plus precisément, le nombre* $E_{s,r}$ *d'irréductibles indépendants de poids* s *et de longueur* r *coïncide avec la dimension de la cellule de* $\underline{\mathrm{ARI}}^{\mathrm{ent}/\mathbb{Z}_2}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$ *contenant les bimoules de longueur* r *de degré total* $\mathrm{d} = \mathrm{s} - \mathrm{r}$.

(iv) *Ceci établit la conjecture de Broadhurst-Kreimer (96) pour les multizêtas eulériens formels.* [34]

19. Les formes quadratiques distinguées et ce qui les distingue

Vraies et fausses indéterminations.

La recherche d'une base canonique d'irréductibles dans les anneaux de multizêtas se ramène toujours à la recherche d'une base canonique dans des algèbres de type $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$. Les indéterminations tiennent à la possibilité qu'on a de modifier toute base donnée en prenant un élément de la base, qui est un alternal/alternil commençant par une composante bialternale de longueur r et degré d, et en ajoutant à sa composante de longueur $r+2k$ et degré $d-2k$ un bialternal arbitraire, lui-même début d'un alternal/alternil. Ces indéterminations ne se présentent donc pas avant la longueur $r = 3$ et (tout au moins pour les multizêtas purs) pas avant le degré $d = 8$ et le poids $s = d + r = 11$. En-dessous, les choix qui semblent se présenter, quand on raisonne exclusivement sur les *mutizêtas scalaires*, comme par exemple : *"Faut-il retenir dans notre base d'irréductibles* $\zeta(2,6)$ *plutôt que* $\zeta(3,5)$ *ou autre chose ?"* ne se posent pas en réalité. Il suffit en effet de prendre en considèration les *fonctions génératrices* pour que ces choix factices disparaissent. Il se trouve qu'il n'existe qu'un seul bialernal[35] de longueur 2, degré 6 et poids 8. C'est le *début* d'un alternal/alternil B devant obligatoirement figurer dans toute base de $\mathrm{ARI}^{\mathrm{ent}}_{\underline{\mathrm{al/al}}}$, *canonique ou non.* Ce B intervient linéairement, avec un facteur scalaire β, dans le logarithme de Lie du facteur zag_{II} et en développant zag^{w_1,w_2} ou plutôt zig^{w_1,w_2} à l'origine on obtient l'*irréductible scalaire à retenir*, qui n'est ni exactement $\zeta(2,6)$ ni exactement $\zeta(3,5)$, mais qui est parfaitement déterminé et qui vaut :

$$\begin{aligned}
\beta &= +1/2\,\zeta(2,6) + \ 3/2\,\zeta(3)\zeta(5) - 167/680400\,\pi^8 \\
&= -1/5\,\zeta(3,5) + 7/10\,\zeta(3)\zeta(5) - 173/1701000\,\pi^8 \\
&= +1/5\,\zeta(5,3) + \ 1/2\,\zeta(3)\zeta(5) - 137/1701000\,\pi^8
\end{aligned}$$

[34] Broadhurst et Kreimer parlent de *sommes d'Euler* là où nous parlons de *multizêtas euleriens.*

[35] à coefficients entiers premiers entre eux

En somme, bien qu'il y ait des indéterminations véritables, elles sont beaucoup moins nombreuses qu'il n'y paraît à ne considérer que les multizêtas scalaires.

Formes quadratiques distinguées.
Ces indéterminations véritables, peut-on les lever d'une manière canonique ? La réponse ne va pas de soi, mais c'est *oui* et le bon critère va nous être fourni par une notion d'*orthogonalité* relative à une forme quadratique bien choisie. Il n'y a guère ici qu'une (resp. deux) manière sensée de contracter les variables continues (resp. discrètes). C'est la règle $< .,. >_0$ (resp. $< .,. >_1$ et $< .,. >_2$) ci-dessous :

$$(114)\quad < x_1^{p_1}\dots x_r^{p_r}, y_1^{q_1}\dots y_r^{q_r} >_0 \;:=\; \frac{p_1!\dots p_r!}{(p_1+\dots p_r)!}\; si\; p_i \equiv q_i \quad (:= 0 \text{ sinon})$$

$$(115)\quad < (\epsilon_1,..,\epsilon_r),(\eta_1,..,\eta_r) >_1 \;:= 1 \;\; si \;\; \epsilon_i \equiv \eta_i \quad (:= 0 \text{ sinon})$$

$$(116)\quad < (\epsilon_1,..,\epsilon_r),(\eta_1,..,\eta_r) >_2 \;:= \;1 \;\; si \;\sum \epsilon_i\eta_i = 0 \quad (:= 0 \text{ sinon})$$

Les formes bilinéaires *kya* et *kwa* sont définies à partir de ces règles par :

$$(117)\qquad \mathrm{kya}(A^\bullet,B^\bullet) \;:=\; \frac{1}{2r}\sum_r \sum_{\gamma\in\Gamma_r} < \gamma(A^\bullet_r),\gamma(B^\bullet_r) >_{0,1}$$

$$(118)\qquad \mathrm{kwa}(A^\bullet,B^\bullet) \;:=\; \sum_r < A^\bullet_r, \mathrm{swap}(B^\bullet_r) >_{0,2}$$

$$= \sum_r < \mathrm{swap}(A^\bullet_r), B^\bullet_r >_{0,2}$$

pourvu que les sommes en r convergent. Ici, $A^\bullet_r$ et $B^\bullet_r$ désignent la r-ième composante des bimoules $A^\bullet$ et $B^\bullet$ et Γ_r est le groupe abélien à $2r$ éléments engendré par *swap* et *push* et agissant sur cette r-ième composante. Les variables continues sont contractées selon la règle 0 et les variables discrètes selon la règle 1 pour *kya* et 2 pour *kwa*.

Ces deux formes bilinéaires, dites *distinguées*, sont chacunes invariantes pour *anti*, *swap*, *push*, mais alors que *kwa* est en quelque sorte spontanément invariante, *kya* ne l'est que parce qu'on l'a rendue telle, en moyennisant sur Γ_r. Sous ce rapport et sous beaucoup d'autres, *kwa* est nettement plus simple et naturelle que *kya*, mais elle possède un léger inconvénient : la forme quadratique associée, bien que non-dégénérée, est de signature mixte, contrairement à la forme *kya*, qui est manifestement définie-positive, ce qui simplifie certaines constructions.

Par exemple, *kya* et *kwa*, qui sont manifestement non-dégénérées, le restent même après restriction aux algèbres des bialternals. Mais pour *kwa* cela demande démonstration, alors que c'est immédiat pour *kya*.

Si donc un bialternal $A^\bullet$ est *kya*-cobialternal (resp. *kwa*-cobialternal), c'est-à-dire *kya*-orthogonal (resp. *kwa*-orthogonal) à tous les bialternals, il est automatiquement $\equiv 0$.

Or toute indétermination rencontrée dans la recherche d'une décomposition canonique des irréductibles correspond en dernière analyse à un degré de liberté dans l'espace des bialternals. Par suite, imposer la kya-*cobialternalité ou, mieux encore, la* kwa-*cobialternalité aux alternals/alternils de notre base*[36] *suffit à lever cette indétermination – d'un seul coup, totalement, et aussi (mais cela demande explication) d'une manière authentiquement canonique.*

Qu'ont donc de si particulier ces deux formes *kya* et *kwa*, et surtout la seconde, par rapport à tous les autres choix possibles ? Elles possèdent bien des avantages, mais surtout celui-ci, décisif : ce sont essentiellement les seules pour lesquelles la *cobialternalité*, l'orthogonalité à *tous* les bialternals, s'exprime par une condition maniable et surtout *unique*, de la forme :

$$\{A_r^\bullet \ \textit{cobialternal}\} \Longleftrightarrow \{\sum_\tau \epsilon(\tau) A_r^{\tau(\mathbf{w})} \equiv 0 \ \ , \tau \in Gl(2r, \mathbb{Z})\} \tag{119}$$

avec des coefficients $\epsilon(\tau)$ entiers et des applications linéaires τ très simples[37]. Voir [E5].

20. La décomposition canonique en irréductibles

Analyser les facteurs $zag^\bullet_{\text{II}}$ et $zag^\bullet_{\text{III}}$, de type symétral/symétril, revient à analyser leur logarithmes de Lie :

$$\mathrm{lozag}^\bullet_{\text{II}} := \mathrm{logari}(\mathrm{zag}^\bullet_{\text{II}}) \quad ; \quad \mathrm{lozag}^\bullet_{\text{III}} := \mathrm{logari}(\mathrm{zag}^\bullet_{\text{III}}) \tag{120}$$

lesquels sont de type alternal/alternil, respectivement *e.l.* et *o.l.* (cf §15) et entiers, i.e. à valeurs dans l'anneau des polynômes (de leur variables continues $\mathbf{u}$). En fait, c'est le facteur III qui prime, car il donne aussi la clef du facteur II (tandis que l'inverse n'est pas vrai).

Or analyser le facteur III revient, dans le cas des multizêtas simples, à construire pour chaque d pair le moule alternal/alternil $ma^\bullet_d/mi^\bullet_d$, à valeurs polynômiales, mentionné en §17. Comme on a vu, l'existence d' *une* paire $ma^\bullet_d/mi^\bullet_d$ est une simple conséquence de l'existence des multizêtas numériques. Idem pour l'existence d' *une* paire à coefficients rationnels. Enfin, l'existence de *la* solution canonique, à coefficients rationnels, résulte

[36] après soustraction évidemment de leur *début* ou *première composante non-nulle*

[37] Seule ombre au tableau : le nombre de sommandes croît très vite avec r. La somme (119) comporte déjà 384 termes pour $r = 3$, qui est pourtant la plus petite longueur où l'on ait à se servir du critère ! On doit ensuite l'utiliser au cran d'après pour $r = 5$ et là la somme (119) comporte presque 120 000 termes. C'est justement cette complexité – inévitable parce qu' inhérente au "niveau 3" – qui a longtemps entravé (jusqu'en juillet 2002) l'étude du moule $loma^\bullet/lomi^\bullet$. Voir §22.

du critère de *cobialternalité*, évoqué au §19 : on impose à $ma^\bullet_d/mi^\bullet_d$ d'être *kya*-orthogonal, ou mieux encore, *kwa*-orthogonal à tous les bialternals.

Dans le cas des multizêtas euleriens, tout revient à construire pour chaque d pair et $r \geq 1$, un moule alternal/alternil $ema^\bullet_{d,r}/emi^\bullet_{d,r}$ à valeurs polynômiales et de composante initiale (non-nulle) coïncidant avec le biélémental $bela^\bullet_{d,r}/beli^\bullet_{d,r}$ du §18. Ici, l'existence des multizêtas euleriens numériques n'assure (directement) que l'existence des $bela^\bullet_{d,1}/beli^\bullet_{d,1}$. Mais par crochetage répété (dans ARI) de $bela^\bullet_{d,1}/beli^\bullet_{d,1}$, qui est de type alternal/il, avec le moule $I^\bullet$ qui, du fait de son extême simplicité est aussi bien alternal/al que alternal/il, on obtient des $ema^\bullet_{d,r}/emi^\bullet_{d,r}$ qui sont automatiquement de type alternal/il. Reste l'unicité-canonicité. Elle est ici encore régie par le principe de cobialternalité, mais, comme on a vu, la présence de variables discrètes (dans $\mathbb{Z}_2$) complique un peu la définition des formes quadratiques. Mais c'est surtout la partie existence qui change.

Revenons aux multizêtas purs pour fixer les idées. L'intéressant est de construire explicitement, pour toute longueur r de 1 à d, toutes les composantes [38] de $ma^\bullet_d/mi^\bullet_d$. On dispose, pour ce faire, de deux démarches inductives distinctes, mais conduisant au même résultat. Il vaut la peine de les mentionner toutes deux, ne serait-ce que pour faire ressortir la belle symétrie **u/v** qui domine toutes ces questions. Les voici :

$$\begin{array}{lcccl}
\text{Induction I} & \{\mathit{alternal} & / & \mathit{alternil}\} & \mathit{pour\ tout}\ \ r \leq\ 2r'-1 \\
 & & \downarrow & & \\
 & \{\mathit{alternal} & / & \mathit{alternil}\} & \mathit{pour\ tout}\ \ r \leq\ 2r' \\
 & & \downarrow & & \\
 & \{\mathit{alternal} & / & \text{push-}\mathit{inv}^t\} & \mathit{pour\ tout}\ \ r \leq\ 2r'+1 \\
 & & \downarrow & & \\
 & \{\mathit{alternal} & / & \mathit{alternil}\} & \mathit{pour\ tout}\ \ r \leq\ 2r'+1 \\
\text{Induction II} & \{\mathit{alternal} & / & \mathit{alternil}\} & \mathit{pour\ tout}\ \ r \leq\ 2r'-1 \\
 & & \downarrow & & \\
 & \{\mathit{alternal} & / & \mathit{alternil}\} & \mathit{pour\ tout}\ \ r \leq\ 2r' \\
 & & \downarrow & & \\
 & \{\text{push-}\mathit{inv}^t & / & \mathit{alternil}\} & \mathit{pour\ tout}\ \ r \leq\ 2r'+1 \\
 & & \downarrow & & \\
 & \{\mathit{alternal} & / & \mathit{alternil}\} & \mathit{pour\ tout}\ \ r \leq\ 2r'+1
\end{array}$$

Pour chacun des deux procédés, les étapes un et deux (première et deuxième flêche descendante) sont définies par des formules assez complexes, mais totalement explicites. Voir [E5]. La troisième étape (troisième flêche descendante) consiste à ajouter un terme correctif pour retablir la 'seconde symétrie' – celle qui manque (*alternil* dans le premier procédé, *alternal*

[38] $ma^\bullet_d/mi^\bullet_d$ étant de type alternal/alternil , sa composante de longueur r est de degré $d-r+1$

dans le second). Ce terme correctif est *a priori* defini *modulo* l'espace des bialternals, mais en fait complètement fixé dès qu'on impose à $ma^\bullet_d/mi^\bullet_d$ la condition de co-bialternalité. Cette troisième étape est nettement plus complexe que les précédentes, mais elle reste malgré tout 'explicite' en ce sens précis qu'elle ne nécessite pas la résolution de systèmes linéaires de plus en plus complexes au fur et à mesure que r augmente [39] mais repose au contraire sur des formules 'directes', à la Plancherel, attachées à la *kwa*-orthogonalité. Qui plus est, l'espoir demeure de leur donner un jour prochain une forme encore plus explicite, par une meilleure connaissance du moule $loma^\bullet/lomi^\bullet$. Voir §22.

21. Le facteur I et la dépendance en π^2

Le premier facteur $zag^\bullet_{\mathrm{I}}$ dans (90), est doublement irrégulier. D'abord il ne vérifie pas la condition de parité subsidiaire, ce qui l'empêche – et ce qui empêche le $zag^\bullet$ total – d'être dans $\mathrm{GARI}_{\mathrm{as}/\overline{\mathrm{as}}}$. Ensuite il ne porte qu'un seul irréductible – c^2 dans le cas formel, π^2 dans le cas numérique. Il est néanmoins très complexe et se scinde lui-même en trois sous-facteurs :

$$\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{I}} = \mathrm{gari}(\mathrm{tal}^\bullet, \mathrm{midfactor}^\bullet, \mathrm{invgari}(\mathrm{pal}^\bullet)) \tag{121}$$

qui sont décrits en long et en large dans [E5]. Contentons-nous ici d'énumérer quelques unes de leurs propriétés.

Le facteur droit $invgari(pal^\bullet)$ est le *gari*-inverse du bimoule bisymétral $pal^\bullet$ de genre 'polaire' (voir §12). Mais comme $pal^\bullet$ ne vérifie pas la condition de parité subsidiaire, son inverse n'est plus bisymétral mais de type symétral/symétril .

Le facteur gauche, $tal^\bullet$, est de genre 'trigonométrique'. C'est *grosso modo* le 'périodisé' (voir §12) de son homologue 'polaire' $pal^\bullet$, mais il est beaucoup plus complexe. C'est indiscutablement le facteur dominant, celui qui contribue le plus à $zag^\bullet_I$. Toutefois il n'est pas entier (il a des pôles à l'origine 0 dans l'espace des $\mathbf{u}$) alors que $zag^\bullet$ doit l'être, et c'est ce qui oblige à le corriger par les deux autres facteurs.

Les trois facteurs sont de type *e.l.* : leurs composantes de longueur paire/impaire sont des polynômes de degré total pair/impair. Pour le facteur médian, les composantes de longueur impaire sont en réalité $\equiv 0$, ce qui souligne son caractère de 'correction'.

Il va sans dire que ces bimoules possèdent tous une double symétrie, mais pas la même : $pal^\bullet$, $tal^\bullet$ et le facteur médian sont bisymétrals, tandis que $invgari(pal^\bullet)$ et $zag^\bullet_{\mathrm{I}}$ lui-même sont de type symétral/symétril.

[39] Dans le présent contexte, ceci semble être une manière raisonnable de distinguer l'*explicite* du simplement *constructif*.

En résumé :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{zag}_{\mathrm{I}}^{\bullet} & \in & \mathrm{GARI}_{\mathrm{as/is}}^{\mathrm{ent}} \\
\mathrm{invgari}(\mathrm{pal}^{\bullet}) & \in & \mathrm{GARI}_{\mathrm{as/is}} \\
\mathrm{pal}^{\bullet}\ \textit{et}\ \mathrm{tal}^{\bullet} & \in & \mathrm{GARI}_{\mathrm{as/as}} \\
\mathrm{midfactor}^{\bullet} & \in & \mathrm{GARI}_{\underline{\mathrm{as/as}}} = \mathrm{expari}(\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/al}}})
\end{array}$$

Comme pour la factorisation globale (90), la difficulté ici n'est pas de prouver l'existence d'une sous-factorisation (121) mais d'en dégager une qui soit 'canonique'. On a en effet une énorme latitude dans le choix du facteur médian, qui *a priori* peut-être postcomposé (dans GARI) par n'importe quel bimoule appartenant au groupe :

$$\mathrm{gari}(\mathrm{invgari}(\mathrm{pal}^{\bullet}), \mathrm{expari}(\mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al/il}}}^{\mathrm{ent}}), \mathrm{pal}^{\bullet}) \tag{122}$$

et porteur de coefficients tous rationnels (après rescaling en c^2 ou π^2). Toutefois, il suffit d'imposer à $zag_{\mathrm{I}}^{\bullet}$ la condition de co-bialternalité pour complètement rigidifier la situation et fixer sans ambiguité le facteur médian. Cela conduit même à des formules passablement explicites. Ainsi, la première composante non-nulle du facteur médian vaut :

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{midfactor}^{w_1,w_2} & = & +1/24\ Q(u_{12})P(u_1) - 1/24\ Q(u_{12})P(u_2) \\
& & -1/24\ Q(u_1)P(u_{12}) + 1/24\ Q(u_2)P(u_{12}) \\
& & -1/24\ Q(u_1)P(u_2) + 1/24\ Q(u_2)P(u_1)
\end{array}$$

Comme les composantes de longueur 1 et 3 sont nulles, cette formule, injectée dans (121), donne aussitôt $zag_{\mathrm{I}}^{\bullet}$ pour $r = 1, 2, 3$. Voir les tables §27.

L'importance du facteur zag_I vient surtout de ce qu'il représente la 'partie' de $zag^{\bullet}$ qui ne se laisse pas linéariser ni remplacer par son logarithme de Lie, mais qu'on *doit* étudier directement, comme élément du groupe GARI. Mais le facteur zag_I importe aussi pour la raison suivante : si, comme on le conjecture, les *relations quadratiques* sur les multizêtas sont vraiment exhaustives, elles impliquent en particulier les *relations gonales* (digonale, pentagonale, hexagonale) et alors il suffit de faire $c = 1$ dans $zag_I^{\bullet}$ pour obtenir un *associateur de Drinfel'd* non-seulement *rationnel* (on savait déjà en construire) mais aussi *canonique* (on ne savait pas).

22. Les facteurs II, III et le bimoule arithmético-analytique *loma*$^{\bullet}$/*lomi*$^{\bullet}$: ce qu'on sait déjà de lui et ce qu'on voudrait savoir de plus

Raisonnons sur les multizêtas purs (i.e. sans racines de l'unité) pour fixer les idées. On a vu que tout se ramenait à la détermination des bimoules alternals/alternils canoniques $ma^\bullet_d/mi^\bullet_d$ (d pair), que l'on peut sans perte d'information regrouper dans un bimoule unique :

$$\mathrm{loma}^\bullet := \sum_{n\geq 1} \mathrm{ma}^\bullet_{2\mathrm{n}} \quad ; \quad \mathrm{lomi}^\bullet := \sum_{n\geq 1} \mathrm{mi}^\bullet_{2\mathrm{n}}$$

Il s'agit alors d'étudier le bimoule $loma^\bullet/lomi^\bullet$ entièrement caractérisé par les trois conditions :

1) $\mathrm{loma}^{\mathbf{w}_1} = \sum_{n\geq 0} u_1^{2n}$ *et donc* $\mathrm{lomi}^{\mathbf{w}_1} = \sum_{n\geq 0} v_1^{2n}$

2) $\mathrm{loma}^\bullet/\mathrm{lomi}^\bullet$ *est alternal/alternil*

3) $\mathrm{loma}^\bullet/\mathrm{lomi}^\bullet$ *est cobialternal, ou plus exactement toutes ses composantes de longueur $r \geq 2$ le sont.*

Précisons un peu le troisième point. La composante de longueur $r = 1$ ne peut évidemment pas être cobialternale. Les composantes de longueur paire au contraire, étant nécessairement de degré impair, le sont automatiquement. Qui plus est, elles sont entièrement déterminées par les flèches 1 et 2 des inductions I ou II (cf §20). La condition de cobialternalité ne porte donc que sur les composantes de longueur $r = 3, 5, 7\ldots$. Celles-ci comportent a priori une énorme indétermination, mais que la cobialternalité (relative à kya ou, mieux, kwa) lève entièrement.
Le mode même de construction de notre moule fait que :

4) *pour tout r les composantes* $\mathrm{loma}^{w_1,..,w_r}$, $\mathrm{lomi}^{w_1,..,w_r}$ *sont des séries formelles à coefficients tous rationnels des variables u_i et v_j.*

De plus, mais c'est moins évident, ces séries formelles convergent à l'origine et la possibilité de traduire la cobialternalié par des équations fonctionnelles de la forme (119) a pour conséquence que :

5) *les composantes* $\mathrm{loma}^{w_1,..,w_r}$, $\mathrm{lomi}^{w_1,..,w_r}$ *sont des fonctions multiméromorphes des variables u_i et v_j respectivement, avec des multipôles élémentaires, porteurs de multirésidus tous rationnels.*

Malheureusement, la simplicité de ces fonctions multiméromorphes est toute relative. On montre en effet que :

6) *pour tout $r \geq 3$ les fonctions* $\mathrm{loma}^{w_1,..,w_r}$, $\mathrm{lomi}^{w_1,..,w_r}$ *possèdent nécessairement une infinité de multipôles.*

Ce dernier point vaut d'ailleurs non seulement pour notre bimoule $loma^\bullet/lomi^\bullet$ canonique (i.e. soumis à 1+2+3) mais pour *tout* bimoule rationnel vérifiant seulement 1+2.

Les deux premières composantes de $loma^\bullet$ et de son *swappé* sont parfaitement élémentaires :

$$\begin{aligned}
\mathrm{loma}^{w_1} &= 1/2\ P(1-u_1) + 1/2\ P(1+u_1)\\
\mathrm{loma}^{w_1,w_2} &= +1/4\ P(1-u_{12})P(1-u_2) - 1/4\ P(1+u_{12})P(1+u_2)\\
&\quad + 1/4\ P(1+u_{12})P(1+u_1) - 1/4\ P(1-u_{12})P(1-u_1)\\
&\quad + 1/4\ P(1-u_2)P(1+u_1) - 1/4\ P(1+u_2)P(1-u_1)
\end{aligned}$$

mais les difficultés commencent dès la longueur $r = 3$, puis se répètent pour chaque longueur impaire. Les multipôles restent élémentaires, i.e. continuent à ressembler à ceux de $loma^{w_1,w_2}$ et à n'impliquer que des sommes de u_i consécutifs. Il existe une 'base privilégiée' de multipôles, dans lesquels ils s'écrivent de manière unique. Tout revient donc à calculer les multirésidus (rationnels) dans cette base-là. La condition de cobialternalité, prise sous forme (119) fournit un procédé totalement algorithmique pour calculer ces multirésidus, mais les calculs sont d'une complexité infernale et n'ont pas encore livré de *formule close* donnant d'un coup tous les multirésidus. L'enjeu paraît de taille. Une telle formule existe sans doute et devrait posséder des propriétes arithmétiques très curieuses. Il est également plus que probable que les multirésidus présentent de fortes propriétés d'alternance qui expliquent pourquoi les fonctions $loma^{\mathbf{w}}$, malgré leurs infinité de multipôles, ont néanmoins des coefficents de Taylor en 0 tous rationnels. Pour chaque $r \geq 3$, ces multipôles devraient se regrouper en une série infinie de paquets finis $\sum_{n\geq 1} Pol^{\mathbf{w}}_{r,n}$, seuls les n premiers paquets contribuant aux coefficients de Taylor d'ordre n. [40] Si tel est bien le cas, on aurait là, pour le calcul de ces coefficients, un procédé encore plus explicite que ceux dont on dispose à présent[41] – sans parler de l'intéret propre que présenterait la connaissance des multirésidus. Il est frustrant de ne pas en savoir plus – pour l'instant ![42]

23. Redistributivité et élimination des '1'

On a vu que les polynômes bialternals $Pa^\bullet_{r,d}/Pi^\bullet_{r,d}$ (longueur r, degré d) possédaient automatiquement deux propriétés supplémentaires :

(i) *parité* : ce sont des fonctions paires de $\mathbf{w}$.

(ii) *push-invariance* : ils ne changent pas sous l'effet du *push* – qui a été défini en (10) et qui, en notation 'augmentée' ou 'cyclique' (cf §18), apparaît comme un simple *shift* sur les variables $\{w_0, w_1, \dots, w_r\}$

[40] *addition (août 2003) :* en fait, il existe bel et bien un mécanisme précis qui assure la rationnalité des coefficients de Taylor de $loma^\bullet/lomi^\bullet$, mais il est autre. Il ne fait pas intervenir de compensations finies entre multipôles. Il tient au contraire à la nature très spéciale (*"périnomale"*) des multirésidus qu'ils portent ; cf fin du §28 et [E6].

[41] à savoir les inductions I ou II.

[42] *addition (août 2003) :* en fait, la question a été élucidée depuis ; cf §28,27,29 et [E6].

Mais ils possèdent aussi une troisième propriété importante, qui est la :

(iii) *redistributivité.*

Tout comme le *push*, la redistributivité est plus commode à exprimer en notation 'augmentée'. Elle concerne non pas $Pa^{\bullet}_{r,d}$ directement, mais son swappé $Pi^{\bullet}_{r,d}$ et signifie qu' en cas de répétition d'une variable v_{i_0} dans la séquence $\{v_0, v_1, \ldots, v_r\}$, notre $Pi^{\mathbf{w}}_{r,d}$ peut s'écrire comme somme finie $\sum_{\mathbf{w}^*} c(v_{i_0}, \mathbf{w}, \mathbf{w}^*) Pi^{\mathbf{w}^*}_{r,d}$ avec des coefficients *entiers* et *universels* $c(v_{i_0}, \mathbf{w}, \mathbf{w}^*)$ et avec de nouvelles séquences $\mathbf{w}^* = \{v_0^*, v_1^*, \ldots, v_r^*\}$ de même longueur que $\mathbf{w}^* = \{v_0, v_1, \ldots, v_r\}$ et faites des mêmes éléments mais dans un ordre différent et surtout *sans répétition* de v_{i_0}. En d'autres termes, la multiplicité de n'importe quelle indice v_{i_0} peut toujours être *redistribuée* parmi les indices v_i autres que v_{i_0}.

Tout comme la *push*-invariance, la redistributivité est une propriété *'primaire'* (voir §9, §11) et beaucoup plus faible que la bialternalité mais, tout comme la *push*-invariance, elle mérite d'être isolée et étudiée pour elle-même. De fait, toute une série de sous-algèbres de ARI peuvent être définies en imposant diverses conditions de *push*-invariance et/ou de redistributivité, et ces sous-algèbres sont d'un grand secours pour mener à bien la décomposition canonique des multizêtas, parce que, tout en se 'rapprochant' de l'algèbre bialternale, elles sont, contairement à celle-ci, caractérisées par un *'groupe de contraintes' fini*, ce qui permet de leur appliquer la théorie hilbertienne des invariants et rend le calcul de leurs dimensions, pour toute cellule (r, d), sinon aisé, du moins totalement algorithmique.

Le théorème de redistributivité possède évidemment une variante pour les doubles symétries de type *alternal/il* et *symétral/il.* Il est particulièrement intéressant de l'appliquer à la valeur $v_0 = 0$, qui du côté 'scalaire' correspond aux valeurs $s_j = 1$ dans le 'premier codage' (cf (§8, §9)). Cela conduit au théorème d' *éliminabilité de tous les '1'* qui dit, dans le cas par exemple des multizêtas purs, que tout $\mathrm{Ze}^{s_1,\ldots,s_r}$ $(s_1 \geq 1)$ peut s'exprimer, *de manière unique* modulo les relations de symétrélité de $\mathrm{Ze}^{\bullet}$, comme combinaison finie à coefficients rationnels de multizêtas $\mathrm{Ze}^{s^*_1,\ldots,s^*_{r^*}}$ *sans 1*, de même poids mais éventuellement de longueur moindre. (i.e. $s_i^* \geq 2$, $\sum s_i^* = \sum s_i$, $r^* \leq r$).

24. Passage aux superalgèbres

L'étude des multizêtas est totalement dominée par des considérations de parité/imparité : chez les longueurs r, les poids s, les dgrés d, les facteurs $Zag^{\bullet}_{I+II}$ et $Zag^{\bullet}_{III}$, etc. Une aussi systématique dichotomie trahit souvent l'existence d'une structure sous-jacente de super-algèbre de Lie.

Qu'en est-il ici ? La plupart des structures et objets que nous venons de passer en revue possèdent effectivement des *super*-analogues, souvent plus réguliers que les originaux et en tout cas dignes d'examen. Mais le lien avec la dimorphie numérique reste pour l'instant assez ténu.

Un fait central domine toutes ces constructions : pour obtenir des *super*-analogues intéressants, il ne faut pas chercher à *plonger* nos diverses algèbres bimouliennes dans des super-algèbres. Il faut bien plutôt les prendre telles quelles, mais en attribuant aux bimoules de longueur r paire (resp. impaire) le grade $0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (resp. $1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Il s'agit donc là non pas d'*extensions*, mais de *constructions parallèles*, de taille inchangée mais de structure autre.

La construction commence avec BIMU, qui devient SUBIMU, avec des superdérivations générales SUAXI, qui agissent toujours selon la formule (40) mais avec, en face de chacun des *deux* termes du membre de droite, un même facteur $(-1)^{r(\mathbf{a})r(\mathbf{b})}$.

Décrivons de plus près la superalgèbre de Lie SUARI qui répond à ARI et qui se décompose selon SUARI := ^{0}SUARI $\oplus$ ^{1}SUARI

(i) ^{0}SUARI (resp. ^{1}SUARI) regroupe tous les bimoules dont les composantes non-nulles ont des longueurs r paires (resp. impaires).

(ii) le super-crochet est la forme bilinéaire *suari* :

$$
\begin{aligned}
(123)\quad C^\bullet = \mathrm{suari}(A^\bullet, B^\bullet) \iff C^{\mathbf{w}} = &\sum_{\mathbf{w}=\mathbf{b}.\mathbf{c}} (A^{\mathbf{b}} B^{\mathbf{c}} - (-1)^{r(\mathbf{b})r(\mathbf{c})} B^{\mathbf{b}} A^{\mathbf{c}}) \\
&+ \sum_{\mathbf{w}=\mathbf{b}.\mathbf{c}.\mathbf{d}} ((-1)^{r(\mathbf{c})r(\mathbf{b})} A^{\lfloor \mathbf{c}} B^{\mathbf{b}\rceil \mathbf{d}} - (-1)^{r(\mathbf{c})r(\mathbf{d})} B^{\lfloor \mathbf{c}} A^{\mathbf{b}\rceil \mathbf{d}}) \\
&+ \sum_{\mathbf{w}=\mathbf{a}.\mathbf{b}.\mathbf{c}} ((-1)^{r(\mathbf{c})r(\mathbf{b})} A^{\mathbf{a}\lceil \mathbf{c}} B^{\mathbf{b}\rfloor} - (-1)^{r(\mathbf{a})r(\mathbf{b})} B^{\mathbf{a}\lceil \mathbf{c}} A^{\mathbf{b}\rfloor})
\end{aligned}
$$

qui est modelée [43] sur le crochet *ari* de ARI mais qui vérifie la relation de super-commutation et l'identité super-Jacobi :

$$
\begin{aligned}
0 &\equiv \mathrm{suari}(A^\bullet_{r_1}, A^\bullet_{r_2}) + (-1)^{r_1 r_2}\, \mathrm{suari}(A^\bullet_{r_2}, A^\bullet_{r_1}) \\
0 &\equiv (-1)^{r_1 r_3}\, \mathrm{suari}(A^\bullet_{r_1}, \mathrm{suari}(A^\bullet_{r_2}, A^\bullet_{r_3})) \\
&\quad + (-1)^{r_2 r_1}\, \mathrm{suari}(A^\bullet_{r_2}, \mathrm{suari}(A^\bullet_{r_3}, A^\bullet_{r_1})) \\
&\quad + (-1)^{r_3 r_2}\, \mathrm{suari}(A^\bullet_{r_3}, \mathrm{suari}(A^\bullet_{r_1}, A^\bullet_{r_2}))
\end{aligned}
$$

[43] $r(\mathbf{w})$ désigne bien sûr la longueur de la séquence $\mathbf{w}$

Le *swap* et le *push* agissent exactement comme dans ARI mais la symétrie simple (resp. double) qu'il convient d'envisager maintenant est *super-alternal* (resp. *super-bialternal*, autrement dit *super-alternal et de swappé super-alternal*). Un bimoule $A^\bullet$ est dit super-alternal ssi :

$$\sum_{\mathbf{w}=\mathrm{sha}(\mathbf{w^1},\mathbf{w^2})} (-1)^{n(\mathbf{w};\,\mathbf{w^1},\mathbf{w^2})}\, A^{\mathbf{w}} = 0 \qquad \forall \mathrm{w}^1 \neq \emptyset\ ,\ \forall \mathrm{w}^2 \neq \emptyset \tag{124}$$

où l'entier $n(\mathbf{w};\ \mathbf{w^1},\mathbf{w^2})$ désigne le nombre d'inversions d'ordre au sein du battage $\mathbf{w}$ des séquences $\mathbf{w^1}$ et $\mathbf{w^2}$.

Les bimoules présentant cette simple/double symétrie sont stables pour le crochet *suari*. D'où le triplet de super-algèbres emboîtées, avec des notations qui s'expliquent d'elles-mêmes :

$$\mathrm{SUARI}_{\underline{\mathrm{sual/sual}}} \ \subset\ \mathrm{SUARI}_{\mathrm{sual}} \ \subset\ \mathrm{SUARI} \tag{125}$$

Tout comme leurs modèles bialternals, les super-bialternals se trouvent *ipso facto* posséder trois séries de propriétés supplémentaires, mais quelque peu différentes :

(i) au lieu de la parité des bialternals, ils présentent une parité alternante , i.e. leurs composantes de longueur paire/impaire sont des fonctions paires/impaires de $\mathbf{w}$ – sauf la composante de longueur 1, qui n'est pas nécessairement impaire. Mais *on doit lui imposer de l'être* si on veut avoir clôture pour *suari*. C'est cette condition subsidiaire que dénote le soulignement de *sual/sual* dans (125)

(ii) ils sont super-*push*-invariants, i.e. $\mathrm{push}(A_r^\bullet) \equiv (-1)^r A_r^\bullet$

(iii) ils sont redistributifs (voir §23)

Les biélémentals $belam_r^\bullet/belim_r^\bullet$ de ARI (see §18) possèdent un analogue exact , à savoir les super-biélémentals $subelam_r^\bullet/subelim_r^\bullet$. Leur définition est très voisine, à ceci près que les entiers $[k]_r$ doivent être partout remplacés par la partie entière $[\![k]\!]_r$ du quotient $[k]_r/2$. La transposition exacte s'effectue comme suit :

$$\begin{aligned}
&\mathrm{subelam}_{r,\,\mathrm{xaxi}}^{w_1,\dots,w_r} = \mathrm{subelam}_{r,\,\mathrm{xaxi}}^{\binom{u_1\ ,\dots,\ u_r}{v_1\ ,\dots,\ v_r}} := \\
&\qquad \sum_{\substack{i,j,m,n\in\mathbb{Z}_{r+1}\\ \cdots<i\leq m<j\leq n<\cdots}} \mathrm{subel}_r^{i,j;m,n}\ \mathrm{xa}(u_i+u_{i+1}+\cdots+u_{j-1})\ \mathrm{xi}(v_m-v_n)\ \equiv \\
&\sum_{\substack{i,j,m,n\in\mathbb{Z}_{r+1}\\ \cdots<i\leq m<j\leq n<\cdots}} \frac{1}{2}\ \mathrm{subel}_r^{i,j;m,n}\ \Big(\mathrm{xa}(u_{i\dots j-1})\ \mathrm{xi}(v_{m:n}) + (-1)^r\,\mathrm{xa}(u_{j\dots i-1})\ \mathrm{xi}(v_{n:m})\Big)
\end{aligned}$$

avec un *swappé* :

$$\mathrm{subelim}_{r,\,\mathrm{xaxi}}^\bullet := \mathrm{swap}\,(\mathrm{subelam}_{r,\,\mathrm{xaxi}}^\bullet) \equiv \mathrm{subelam}_{r,\,\mathrm{xixa}}^\bullet \tag{126}$$

et des coefficients entiers :

$$\mathrm{subel}_r^{i,j;m,n} \equiv (-1)^r \mathrm{subel}_r^{j,i;n,m} \ := \ [\![i,j;m,n]\!]_r \ \frac{(-1)^{r\,(i-1)}\ (-1)^{[\![m-i]\!]_r+[\![n-j]\!]_r}\quad [\![r-1]\!]_r!}{[\![m-i]\!]_r!\ [\![n-j]\!]_r!\ [\![j-m-1]\!]_r!\ [\![i-n-1]\!]_r!}$$

qui comportent un 'facteur de cohérence' $[\![i,j;m,n]\!]_r$ qui vaut tantôt 1 tantôt 0 :

$$[\![i,j;m,n]\!]_r := 1 + [\![m-i]\!]_r + [\![n-j]\!]_r + [\![j-m-1]\!]_r + [\![i-n-1]\!]_r - [\![r-1]\!]_r$$

mais qui ne figurait pas dans la définition parallèle de $bel_r^{i,j;m.n}$ pour la bonne raison que :

$$[i,j;m,n]_r := 1 + [m-i]_r + [n-j]_r + [j-m-1]_r + [i-n-1]_r - [r-1]_r \equiv 1$$

Pour une longueur r paire/impaire, le super-biélémental $subelam^{\bullet}_{r,\mathrm{xaxi}}$ dépend uniquement de la partie paire/impaire de $xaxi$. Mais le fait notable est que *dans tous les cas* $\mathrm{subelam}^{\bullet}_{\mathrm{r,xaxi}}$ *est super-bialternal.*

Ces super-biélémentals sont en un sens plus 'primitifs' que les biélémentals, dont on a vu qu'ils se ramenaient tous, par crochetage répété avec $I^{\bullet}$, aux biélémentals de longueur $r = 1$. C'est là une complication, mais bénigne, et toutes les autres différences sont 'en faveur' des objets *super* : les super-bialternals sont plus simples à construire que les bialternals, plus faciles à énumérer, et surtout leurs systèmes de générateurs sont nettement plus élémentaires. Par exemple, les bialternals passablement 'déviants' de la série $carma^{\bullet}/carmi^{\bullet}$ n'ont pas de super-analogues.

25. La dimorphie et le corps des naturels

Ce Survol, tout comme le livre [E5] qu'il survole, reprend pour l'étude des multizêtas le point de vue le plus ancien (1975) qui est aussi, à notre avis, le plus fécond : celui de la génération simultanée des *fonctions spéciales* et des *constantes transcendantes.* Cette approche n'a pas seulement pour elle d'être la plus naturelle (– cela peut toujours se discuter –) ; elle a aussi l'avantage, indiscutable lui, de conduire sans effort et presque mécaniquement au bon cadre et aux bons choix : bons codages, bonnes fonctions génératrices ; bonnes relations de base ; bonnes structures ambiantes. Enfin et surtout, elle éclaire les vrais ressorts de la *dimorphie* et aide bien à comprendre qu'il s'agit là, non d'une curiosité, encore moins d'une pathologie, mais d'un phénomène très répandu et même, serait-on tenté de dire, quasiment générique. Plusieurs chapitres de [E5] et une section de [E4] tentent de systématiser un peu cette question de la dimorphie, mais on peut tenter ici d'en donner un premier aperçu, au moyen d'une énumération suggestive des notions de base qui, justement, vont toutes par paires.

On engendre, “partant de rien”, par le simple jeu des opérations $\{+,\times,\partial,\circ\}$, des fonctions spéciales ‘primitives’, ou *monômes*, de plus en plus nombreuses et qui vivent simultanément dans deux ‘modèles’, $(x,\times,\star)$ et $(\xi,*,\times)$, reliés par une variante de la transformation de Borel-Laplace : on a d’une part des germes à l’infini dans le plan des x ; de l’autre des germes en 0 dans le plan des ξ, avec de chaque côté *deux* produits distincts : la multiplication ponctuelle (partout notée $\times$) et une variante de la convolution ($\star$ chez les x, $*$ chez les ξ), avec bien sûr Borel-Laplace échangeant multiplication et convolution. Les monômes que l’on construit sont, dans leur ensemble, doublement stables (ou si l’on préfère, quadruplement) : pour la multiplication et la convolution, et ce de chaque côté. A ces deux produits, se trouvent associées deux riches infinités de *dérivations exotiques*, les Δ_ω et les ∇_ω, pourvues d’une indexation continue ($\omega\in\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$), irréductibles aux dérivations ordinaires, et totalement indépendantes (libres de toute contrainte a priori). La dérivée par Δ_ω ou ∇_ω d’un *monôme* s’exprime en fonction de deux ingrédients : des *monômes antérieurs*, i.e. déjà construits et plus “simples” ; et des constantes transcendantes, les *moniques*, que ces relations déterminent entièrement. Il existe, chez les monômes, un codage adapté à la multiplication dans le plan des x et à la convolution dans le plan des ξ, et un autre codage adapté à la convolution dans le plan des x et à la multiplication dans le plan des ξ. Ces deux codages ont leur répondant chez les moniques, où ils donnent deux expressions différentes du produit. Mais bien que la *dimorphie* des monômes soit indissociable de celle des moniques, elle possède un sens complètement différent pour les uns et pour les autres : chez les monômes (qui sont des germes), elle correspond à deux produits réellement différents (la multiplication ponctuelle et la convolution), tandis que chez les moniques (qui sont des scalaires) elle correspond à deux manières différentes de calculer l’unique produit (qui est celui des scalaires). Enfin, comme les dérivations exotiques Δ_ω et ∇_ω, mesurent, chacune à sa manière, l’éventuelle singularité présente au-dessus du point ω, et comme la convolution *additionne* les points singuliers des deux facteurs, tandis que la multiplication les *laisse en place*, on doit s’attendre à ce que les deux codages dont il vient d’être question se correspondent sous une involution du type *swap*, i.e. échangeuse de différences et de sommes.

Les divers anneaux de multizêtas ne sont que les tout premiers ‘domaines de dimorphie’ de $\mathbb{R}$ et les plus simples aussi. Derrière s’en profilent beaucoup d’autres : hyperlogarithmiques ; algébrico-différentiels, etc. Voir [E4] et [E5]. Il semble en fait que le phénomène de la dimorphie se retrouve à presque tous les niveaux de complexité et s’étende ‘à perte de vue’ jusqu’aux confins du corps $\mathbb{N}a$ des ‘naturels’, même si peu de gens semblent en avoir conscience – peut-être parce que la théorie en vogue des ‘périodes’ tend à occulter le phénomène, mais peut-être aussi pour les deux raisons suivantes :

(i) les extensions successives n'ont rien de progressif, chacune d'elles forçant à repousser *très loin* la frontière du nouveau domaine, pour que la dimorphie continue de s'y manifester

(ii) le phénomène tend à se diluer au fur et à mesure qu'on élargit les domaines, en ce sens que les deux 'produits' se mettent à interagir de façon de plus en plus 'faible'.

Une autre curiosité consiste en ceci : alors que la dimorphie fonctionnelle ne prête pas à discussion, la dimorphie numérique est beaucoup plus difficile à enfermer dans une définition précise. Intuitivement, pour mériter le qualificatif de 'dimorphe', un $\mathbb{Q}$-anneau $\mathbb{D}$ doit posséder deux bases *naturelles* dénombrables $\{\alpha_m\}$ et $\{\beta_n\}$, avec une indexation *naturelle* en m et n [44], une loi de conversion finie :

$$\alpha_m \equiv \sum_n H_m^n \, \beta_n \quad ; \quad \beta_n \equiv \sum_m K_n^m \, \alpha_m \tag{127}$$

et deux procédés distincts pour calculer l'unique produit de $\mathbb{D}$, qui est la multiplication des réels :

$$\alpha_m \, \alpha_n \equiv \sum_r A_{m,n}^r \, \alpha_r \quad ; \quad \beta_m \, \beta_n \equiv \sum_r B_{m,n}^r \, \beta_r \tag{128}$$

les sommes étant toutes finies et les constantes H, K, A, B rationnelles.

Mais comme il est toujours possible de construire, dans n'importe quel anneau dénombrable, des bases *ad hoc* $\{\alpha_m\}$,$\{\beta_n\}$, parfaitement artificielles mais remplissant les conditions ci-dessus, on voit que la présence de *dimorphie numérique véritable* repose toute entière sur le caractère *naturel* des deux bases en question, en contraste avec le caractère *caché* du 'noyau' de $\mathbb{D}$, lequel est généralement un système $\{\gamma_r\}$ d' irréductibles.

En pratique – songez aux multizêtas – aucune hésitation n'est possible : les bases $\{\alpha_m\}$,$\{\beta_m\}$ sont aussi manifestement 'données' que l'ensemble $\{\gamma_r\}$ est difficile à 'extraire'. On n'est certes pas là en présence d'une définition mathématique, mais à notre avis cela ne retire à la notion de dimorphie rien de sa pertinence. [45]

26. Un premier bilan : ce qui est acquis et ce qui reste à faire

Le présent Survol se voulait une introduction à un texte d'ensemble [E5], fort long, qui sera mis prochainement sur la Toile et soumis à fréquentes

[44] m et n parcourent en général non pas $\mathbb{N}$ lui-même , mais des ensembles plus complexes, tels le monoïde engendré par $\mathbb{N}$.

[45] à tout prendre, cette résistance à se laisser cerner, de la part d'un fait brut aussi massif que la dimorphie, signalerait plutôt son *importance* que son *évanescence*. Au fond, seules les réalités secondaires ou superficielles peuvent être définies sans résidu.

révisions et additions au cours des prochains mois et années. [46] Ce mémoire [E5] cherche avant tout à présenter une vue d'ensemble d'un domaine récemment ouvert à l'exploration et à faire ressortir sa structure propre. De là vient qu'il est à fois systématique et schématique, surchargé et incomplet. Ainsi ai-je inclus nombre de développements (par exemple sur les symétries en u et surtout en uu) dont certains apportent assez peu à l'étude des multizêtas, mais qui tous font indiscutablement partie de la galaxie ARI/GARI et sont à ce titre indispensables à une vision équilibrée du sujet. Inversement, j'ai sévèrement élagué la partie "niveau 3" (sur la décomposition explicite en irréductibles), car elle est excessivement riche en formules, encore inachevée à certains égards (cf $loma^\bullet/lomi^\bullet$ etc), et en tout cas trop récente pour autoriser le recul nécessaire à une mise en forme définitive.

S'il m'est permis d'ajouter une note personnelle, je dirai que si la partie *recherche* a été un pur délice, tant les méthodes nouvelles permettent d'avancer vite, la partie *rédaction* (de [E5]) fut, elle, franchement pénible. Il règne en effet dans ces théories une 'biodiversité tropicale' : pléthore de structures et d'opérations ; prolifération de 'moules spéciaux', donnant lieu à un formulaire éléphantesque ; surabondance de symétries, réflexions et involutions entrecroisées, etc...Il fallait donc ordonner cette matière brute et forger pour tous ces objets une nomenclature satisfaisante, facile à retenir, évocatrice des principales propriétés et symétries. D'où bien des tâtonnements et changements successifs – parfois dix de suite – entraînant chacun une reformulation partielle des énoncés et une refonte totale du formulaire. Mais ce travail me paraissait essentiel et j'ai tenu à différer la publication jusqu'à ce que les choses fussent suffisamment décantées.

Une dernière difficulté mérite d'être signalée, car elle est propre au calcul moulien et risque de se présenter à nouveau. Il s'agit de l'inévitable schématisme des preuves. Un texte comme [E5] contient une telle masse de formules que leurs preuves, totalement explicitées, paraîtraient extrêmement répétitives, ennuyeuses et, bien qu'assez courtes dans chaque cas, d'une longueur redhibitoire une fois mises bout à bout. On doit donc se contenter d'indiquer la démarche générale, en signalant les points un peu délicats. Même si le schématisme de ce premier texte [E5], qui par certains côtés s'apparente à un compendium de résultats, peut paraître excessif, il n'en tient pas moins à la nature du sujet. Et c'est là un mode de présentation auquel il faudra s'habituer à mesure que se répendra le calcul moulien. Mais qu'on se rassure : cela n'entame ni la fiabilité ni la transparence. La fiabilité

[46] Cette formule du 'texte evolutif', régulièrement remis à jour, semble être la formule d'avenir. Elle s'impose en tout cas pour un sujet en plein essor comme celui-ci

d'abord : toutes les formules mouliennes présentées ici ont été soigneusement démontrées, théoriquement, sur papier, *puis* vérifiées sur ordinateur. [47] Et si le lecteur est désireux d'expliciter tel ou tel enchaînement, il ne tient qu'à lui de le faire. La transparence ensuite : les preuves ne servent pas qu'à fonder des certitudes ; elles ont une seconde fonction, plus essentielle encore : produire de la compréhension. Or les moules ont ce grand avantage : la *forme* chez eux n'est jamais très éloignée du *fond*, ce qui garantit presqu'automatiquement la lisibilité de tout texte dont ils constituent l'armature. De fait, on s'aperçoit vite, à l'usage, que les identités mouliennes ont tendance à s'*écrire toutes seules*, à se *corriger toutes seules*, à se *généraliser toutes seules*.... J'exagère à peine !

Ce qui est acquis.

- Le cadre adapté, qui est la riche structure ARI/GARI
- L'équation fonctionnelle des fonctions multizêta, leur prolongement méromorphe [48] et ses propriétés arithmétiques
- Le théorème de libre génération avec l'isomorphisme sous-jacent qui en fait une évidence.
- La bi/tripartion des anneaux de multizêtas.
- Les quatre moules bisymétrals de base (polaires ou trigonométriques) liés à la π^2-dépendance, avec leurs innombrables propriétes et la soixantaine de moules primaires qui leur sont attachés.
- Le décompte des irréductibles et la formule BK, tout au moins pour les multizêtas euleriens.
- Le critère de décomposition canonique et le principe de cobialternalité.
- La déduction de la relation 'digonale' à partir des relations quadratiques.
- Le phénomène de redistributivité et son corollaire, l'élimination canonique des '1'.

Ce qui reste à faire (mai 2002).

Trois axes principaux semblent se dégager :

- Multizêtas :
  - Elucidation des multirésidus de $loma^\bullet/lomi^\bullet$.
  - Equivalence des relations quadratiques et des relations gonales ?
- Dimorphie générale :
  - Exploration des autres domaines de dimorphie.
  - Que devient la dichotomie *relations quadratiques/gonales ?*

[47] Parfois ce fut l'inverse : les formules furent d'abord devinées à partir de calculs sur ordinateur, puis vérifiées théoriquement. Seules de rares formules, retenues à titre de complément ou d'illustration, comme certaines identitées en uu ou certaines estimations de complexité, n'ont été vérifiées que sur ordinateur.

[48] Il s'agit là à vrai dire d'un fait très élémentaire mais méconnu et même parfois nié.

La dimorphie est-elle exhaustive ?

– ARI/GARI :

Classification des diverses sous-algèbres, surtout *secondaires* (ie. à *double symétrie*) et à valeurs dans divers anneaux.

Calcul systématique de toutes les dimensions correspondantes.

Systèmes de générateurs.

Etudier le mélange de *structures liées* et de *structures libres* qui semble régner partout dans ARI/GARI.

Ce qui a été fait entretemps (août 2003).

Le présent article, que j'avais remis en mai 2002, me fut retourné en juin ou juillet 2003, à la demande du referee, pour retouches mineures. Or entretemps les choses avaient passablement progressé, apportant réponse aux deux tiers des questions de la liste ci-dessus. J'énumère à la suite ces principales avancées, puis je les décris plus en détail dans cinq sections supplémentaires (*Additions 1,..,5 ; §28–§32*) que j'annexe à cet article.

- La structure du moule $loma^\bullet/lomi^\bullet$, clef des facteurs $zag^\bullet_{II}$, $zag^\bullet_{III}$ et des irréductibles qu'ils portent, a été entièrement élucidée. La nature méromorphe de ses composantes a été confirmée, leurs multipôles exactement localisés, et leurs multirésidus codifiés au moyen de la notion nouvelle de *fonction périnomale*.[49]
- le moule $roma^\bullet/romi^\bullet$, qui fait pendant à $loma^\bullet/lomi^\bullet$ et qui, conjointement à $pal^\bullet/pil^\bullet$ et $tal^\bullet/til^\bullet$, donne la clef du facteur $zag^\bullet_I$, a fait l'objet d'une description parallèle[50].
- Ceci parachève la décomposition canonico-explicite en irréductibles[51].
- Ceci fournit un associateur de Drinfeld rationnel et canonico-explicite[52].
- Ceci conduit au premier exemple non-élémentaire de 'dérivation numérique'[53].

27. Un aperçu du formulaire

Ce Survol d'une théorie typiquement *à formules* serait incomplet sans une sélection de quelques formules-clef. (Un formulaire très volumineux est attaché à [E5] et il se double d'un logiciel Maple *en ligne* permettant de 'jouer' avec les principales structures, opérations et objets de la théorie.)

Lois de ARI/GARI.

[49] cf §28.
[50] cf §30.
[51] cf §29.
[52] cf §30.
[53] cf §29.

Pour plus de clarté, on mentionne (en indice inférieur), pour chaque moule, la longueur r des composantes envisagées.

Si $C^\bullet = ari(A^\bullet, B^\bullet)$, on trouve avec les notations habituelles et pour les longueurs $r = 1, 2, 3$:

$$
\begin{aligned}
C_1^{\binom{u_1}{v_1}} &= 0 \\
C_2^{\binom{u_1,\ u_2}{v_1,\ v_2}} &= +A_1^{\binom{u_{12}}{v_2}} B_1^{\binom{u_1}{v_{1:2}}} - A_1^{\binom{u_{12}}{v_1}} B_1^{\binom{u_2}{v_{2:1}}} + A_1^{\binom{u_1}{v_1}} B_1^{\binom{u_2}{v_2}} \\
&\quad - B_1^{\binom{u_{12}}{v_2}} A_1^{\binom{u_1}{v_{1:2}}} + B_1^{\binom{u_{12}}{v_1}} A_1^{\binom{u_2}{v_{2:1}}} - B_1^{\binom{u_1}{v_1}} A_1^{\binom{u_2}{v_2}} \\
C_3^{\binom{u_1,\ u_2,\ u_3}{v_1,\ v_2,\ v_3}} &= +A_1^{\binom{u_{123}}{v_3}} B_2^{\binom{u_1\ ,\ u_2}{v_{1:3}\ ,\ v_{2:3}}} - A_1^{\binom{u_{123}}{v_1}} B_2^{\binom{u_2\ ,\ u_3}{v_{2:1}\ ,\ v_{3:1}}} \\
&\quad + A_1^{\binom{u_1}{v_1}} B_2^{\binom{u_2\ ,\ u_3}{v_2\ ,\ v_3}} - B_2^{\binom{u_{12}\ ,\ u_3}{v_2\ ,\ v_3}} A_1^{\binom{u_1}{v_{1:2}}} + B_2^{\binom{u_{12}\ ,\ u_3}{v_1\ ,\ v_3}} A_1^{\binom{u_2}{v_{2:1}}} \\
&\quad - B_2^{\binom{u_1\ ,\ u_{23}}{v_1\ ,\ v_3}} A_1^{\binom{u_2}{v_{2:3}}} + B_2^{\binom{u_1\ ,\ u_{23}}{v_1\ ,\ v_2}} A_1^{\binom{u_3}{v_{3:2}}} - B_2^{\binom{u_1\ ,\ u_2}{v_1\ ,\ v_2}} A1^{\binom{u_3}{v_3}} \\
&\quad - B_1^{\binom{u_{123}}{v_3}} A_2^{\binom{u_1\ ,\ u_2}{v_{1:3}\ ,\ v_{2:3}}} + B_1^{\binom{u_{123}}{v_1}} A_2^{\binom{u_2\ ,\ u_3}{v_{2:1}\ ,\ v_{3:1}}} - B_1^{\binom{u_1}{v_1}} A_2^{\binom{u_2\ ,\ u_3}{v_2\ ,\ v_3}} \\
&\quad + A_2^{\binom{u_{12}\ ,\ u_3}{v_2\ ,\ v_3}} B_1^{\binom{u_1}{v_{1:2}}} - A_2^{\binom{u_{12}\ ,\ u_3}{v_1\ ,\ v_3}} B_1^{\binom{u_2}{v_{2:1}}} + A_2^{\binom{u_1\ ,u_{23}}{v_1\ ,v_3}} B_1^{\binom{u_2}{v_{2:3}}} \\
&\quad - A_2^{\binom{u_1\ ,\ u_{23}}{v_1\ ,\ v_2}} B_1^{\binom{u_3}{v_{3:2}}} + A_2^{\binom{u_1\ ,\ u_2}{v_1\ \ v_2}} B_1^{\binom{u_3}{v_3}}
\end{aligned}
$$

Pareillement, si $C^\bullet = gari(A^\bullet, B^\bullet)$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
C_1^{\binom{u_1}{v_1}} &= +A_1^{\binom{u_1}{v_1}} + B_1^{\binom{u_1}{v_1}} \\
C_2^{\binom{u_1\ ,\ v_2}{u_1\ ,\ v_2}} &= +A_2^{\binom{u_1\ ,\ v_2}{v_1\ ,\ u_2}} + B_2^{\binom{u_1\ ,\ u_2}{v_1\ ,\ v_2}} \\
&\quad + A_1^{\binom{u_{12}}{v_2}} B_1^{\binom{u_1}{v_{1:2}}} - A_1^{\binom{u_{12}}{v_1}} B_1^{\binom{u_2}{v_{2:1}}} + A_1^{\binom{u_1}{v_1}} B_1^{\binom{u_2}{v_2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C_3^{\binom{u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3}{v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3}} &= +A_3^{\binom{u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3}{v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3}} + B_3^{\binom{u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3}{v_1\ ,\ v_2\ ,\ v_3}} \\
&\quad + A_2^{\binom{u_1\ ,\ u_2}{v_1\ ,\ v_2}} B_1^{\binom{u_3}{v_3}} - A_2^{\binom{u_1\ ,\ u_{23}}{v_1\ ,\ v_2}} B_1^{\binom{u_3}{v_{3:2}}} + A_2^{\binom{u_1\ ,\ u_{23}}{v_1\ ,\ v_3}} B_1^{\binom{u_2}{v_{2:3}}} \\
&\quad - A_2^{\binom{u_{12}\ ,\ u_3}{v_1\ ,\ v_3}} B_1^{\binom{u_2}{v_{2:1}}} + A_2^{\binom{u_{12}\ ,\ u_3}{v_2\ ,\ v_3}} B_1^{\binom{u_1}{v_{1:2}}} + A_1^{\binom{u_1}{v_1}} B_2^{\binom{u_2\ ,\ u_3}{v_2\ ,\ v_3}} \\
&\quad + A_1^{\binom{u_{123}}{v_1}} B_2^{\binom{u_3\ ,\ u_2}{v_{3:1}\ ,\ v_{2:1}}} + A_1^{\binom{u_{123}}{v_3}} B_2^{\binom{u_1\ ,\ u_2}{v_{1:3}\ ,\ v_{2:3}}} + A_1^{\binom{u_{12}}{v_2}} B_1^{\binom{u_1}{v_{1:2}}} B_1^{\binom{u_3}{v_3}} \\
&\quad - A_1^{\binom{u_{12}}{v_1}} B_1^{\binom{u_2}{v_{2:1}}} B_1^{\binom{u_3}{v_3}} - A_1^{\binom{u_{123}}{v_2}} B_1^{\binom{u_1}{v_{1:2}}} B_1^{\binom{u_3}{v_{3:2}}}
\end{aligned}
$$

Bimoules bisymétrals

Rappelons que $P(t) := 1/t$ et $Q(t) := c/tan(c.t)$. Nous ne tabulons ici que les 5 premières composantes du bimoule trigonométrique $tal^\bullet$. Le bimoule $pal^\bullet$ s'en déduit en faisant $c = 0$ et donc $Q \to P$. Puis on tire de là $til^\bullet$ et $pil^\bullet$ par application du *swap*.

$$\mathrm{tal}^{\mathbf{w_1}} = -1/2\,Q(u_1)$$
$$\mathrm{tal}^{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2}} = +1/12\,Q(u_1)Q(u_2) + 1/12\,Q(u_1)Q(u_{12}) + 1/24\;c^2$$
$$\begin{aligned}\mathrm{tal}^{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2},\mathbf{w_3}} = &-1/24\;Q(u_1)Q(u_{12})Q(u_3)\\ &-1/48\;c^2Q(u_1) + 1/24\;c^2Q(u_2) - 1/24\;c^2Q(u_3)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{tal}^{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2},\mathbf{w_3},\mathbf{w_4}} = &-1/720\;Q(u_1)Q(u_2)Q(u_3)Q(u_4)\\ &+1/180\;Q(u_1)Q(u_{12})Q(u_3)Q(u_4)\\ &-1/240\;Q(u_1)Q(u_2)Q(u_3)Q(u_{1234})\\ &+1/120\;Q(u_1)Q(u_{12})Q(u_3)Q(u_{1234})\\ &+1/240\;Q(u_1)Q(u_2)Q(u_4)Q(u_{1234})\\ &+1/720\;Q(u_1)Q(u_{12})Q(u_4)Q(u_{1234})\\ &-5/288\;c^2Q(u_1)Q(u_3) + 19/1440\;c^2Q(u_1)Q(u_4) - 1/480\;c^2Q(u_2)Q(u_3)\\ &+1/1440\;c^2Q(u_2)Q(u_4) + 1/288\;c^2Q(u_3)Q(u_4) + 7/1440\;c^2Q(u_1)Q(u_{12})\\ &+7/720\;c^2Q(u_1)Q(u_2) - 1/480\;c^2Q(u_1)Q(u_{1234}) - 1/288\;c^2Q(u_2)Q(u_{1234})\\ &+11/1440\;c^2Q(u_3)Q(u_{1234}) - 1/480\;c^2Q(u_4)Q(u_{1234}) + 7/5760\;c^4\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathrm{tal}^{\mathbf{w_1},\mathbf{w_2},\mathbf{w_3},\mathbf{w_4},\mathbf{w_5}} = &+1/1440\;Q(u_1)Q(u_{12})Q(u_3)Q(u_4)Q(u_5)\\ &+1/480\;Q(u_1)Q(u_2)Q(u_3)Q(u_{1234})Q(u_5)\\ &-1/240\;Q(u_1)Q(u_{12})\;Q(u_3)Q(u_{1234})Q(u_5)\\ &-1/480\;Q(u_1)Q(u_2)Q(u_4)Q(u_{1234})Q(u_5)\\ &-1/1440\;Q(u_1)Q(u_{12})Q(u_4)Q(u_{1234})Q(u_5)\\ &+1/960\;c^2Q(u_1)Q(u_3)Q(u_4) - 1/2880\;c^2Q(u_1)Q(u_3)Q(u_5)\\ &+1/64\;c^2Q(u_{12})Q(u_2)Q(u_3) - 11/2880\;c^2Q(u_{1234})Q(u_3)Q(u_5)\\ &+1/960\;c^2Q(u_{1234})Q(u_4)Q(u_5) + 7/1440\;c^2Q(u_{12})Q(u_3)Q(u_4)\\ &+1/240\;c^2Q(u_{12})Q(u_2)Q(u_5) - 1/1440\;c^2Q(u_2)Q(u_3)Q(u_4)\\ &+1/480\;c^2Q(u_2)Q(u_3)Q(u_5) + 1/1440\;c^2Q(u_3)Q(u_4)Q(u_5)\\ &+1/72\;c^2Q(u_{12})Q(u_1)Q(u_3) - 7/1440\;c^2Q(u_{12})Q(u_{1234})Q(u_4)\\ &-1/480\;c^2Q(u_2)Q(u_4)Q(u_5) + 1/960\;c^2Q(u_{1234})Q(u_1)Q(u_5)\\ &+1/576\;c^2Q(u_{1234})Q(u_2)Q(u_5) - 7/1440\;c^2Q(u_{1234})Q(u_3)Q(u_4)\\ &-7/1440\;c^2Q(u_{12})Q(u_{1234})Q(u_3) - 1/60\;c^2Q(u_1)Q(u_2)Q(u_3)\\ &-1/288\;c^2Q(u_{12})Q(u_2)Q(u_4) - 17/2880\;c^2Q(u_1)Q(u_2)Q(u_5)\\ &+1/192\;c^2Q(u_1)Q(u_2)Q(u_4) - 1/576\;c^2Q(u_1)Q(u_4)Q(u_5)\\ &+1/960\;c^4Q(u_5) - 7/1440\;c^4Q(u_{12}) + 7/1440\;c^4Q(u_{1234})\\ &-19/11520\;c^4Q(u_1) + 19/2880\;c^4Q(u_2)\end{aligned}$$

Le facteur $zag_I^\bullet$ et la dépendance en π^2.

Toutes les fonctions ci-dessous sont méromorphes, mais régulières en l'origine, car là les pôles des $P(.)$ et des $Q(.)$ se compensent. Elles livrent donc des coefficients de Taylor qui, après changement de c en π, décrivent la dépendance canonique en π^2 des multizêtas (ici : *purs*), pour toute valeur du poids s et (ici) des longueurs $r = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}
zag_I^{w_1} &= -1/2\ Q(u_1) + 1/2\ P(u_1)\\
zag_I^{w_1,w_2} &= +1/12\ Q(u_1)Q(u_2) + 1/12\ Q(u_1)Q(u_{12}) + 1/24\ c^2\\
&\quad +1/24\ Q(u_2)P(u_1) - 5/24\ Q(u_{12})P(u_1) + 5/24\ Q(u_{12})P(u_2)\\
&\quad -7/24\ Q(u_1)P(u_2) - 1/24\ Q(u_1)P(u_{12}) + 1/24\ Q(u_2)P(u_{12})\\
&\quad +1/3\ P(u_1)P(u_{12}) - 1/12\ P(u_{12})P(u_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
zag_I^{w_1,w_2,w_3} &= -1/24\ Q(u_1)Q(u_{12})Q(u_3)\\
&\quad -1/48\ Q(u_1)c^2 + 1/24\ Q(u_2)c^2 - 1/24\ Q(u_3)c^2\\
&\quad -1/48\ Q(u_{123})Q(u_2)P(u_1) + 1/48\ Q(u_{123})Q(u_{12})P(u_1)\\
&\quad +1/24\ Q(u_{12})Q(u_3)P(u_1) + 1/16\ Q(u_{123})Q(u_1)P(u_2)\\
&\quad -1/48\ Q(u_{123})Q(u_{12})P(u_2) + 1/48\ Q(u_{123})Q(u_3)P(u_2)\\
&\quad +1/48\ Q(u_{123})Q(u_{23})P(u_2) - 1/48\ Q(u_1)Q(u_3)P(u_2)\\
&\quad +1/48\ Q(u_1)Q(u_{23})P(u_2) - 1/24\ Q(u_{12})Q(u_3)P(u_2)\\
&\quad +1/16\ Q(u_1)Q(u_2)P(u_3) - 1/48\ Q(u_1)Q(u_{23})P(u_3)\\
&\quad +1/24\ Q(u_1)Q(u_{12})P(u_3) - 1/24\ Q(u_{123})Q(u_1)P(u_3)\\
&\quad -1/48\ Q(u_{123})Q(u_2)P(u_3) - 1/48\ Q(u_{123})Q(u_{23})P(u_3)\\
&\quad -1/48\ Q(u_{123})Q(u_2)P(u_{12}) + 1/48\ Q(u_{123})Q(u_1)P(u_{12})\\
&\quad +1/48\ Q(u_1)Q(u_2)P(u_{23}) - 1/48\ Q(u_1)Q(u_3)P(u_{23})\\
&\quad -1/48\ Q(u_{123})Q(u_2)P(u_{23}) + 1/48\ Q(u_{123})Q(u_3)P(u_{23})\\
&\quad -1/48\ Q(u_1)P(u_2)P(u_3) - 3/16\ Q(u_1)P(u_2)P(u_{23})\\
&\quad -1/48\ Q(u_1)P(u_2)P(u_{123}) - 1/48\ Q(u_1)P(u_3)P(u_{12})\\
&\quad +1/16\ Q(u_1)P(u_3)P(u_{23}) + 1/48\ Q(u_1)P(u_3)P(u_{123})\\
&\quad +1/48\ Q(u_2)P(u_3)P(u_1) + 1/48\ Q(u_2)P(u_3)P(u_{12})\\
&\quad +1/48\ Q(u_3)P(u_1)P(u_{12}) + 1/48\ Q(u_3)P(u_1)P(u_{123})\\
&\quad -1/48\ Q(u_3)P(u_2)P(u_{12}) - 1/48\ Q(u_3)P(u_2)P(u_{123})\\
&\quad -1/8\ Q(u_{12})P(u_1)P(u_3) - 1/48\ Q(u_{12})P(u_1)P(u_{123})\\
&\quad +1/8\ Q(u_{12})P(u_2)P(u_3) + 1/48\ Q(u_{12})P(u_2)P(u_{123})\\
&\quad +1/48\ Q(u_{23})P(u_2)P(u_1) + 1/48\ Q(u_{23})P(u_2)P(u_{123})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-1/48\ Q(u_{23})P(u_3)P(u_1) - 1/48\ Q(u_{23})P(u_3)P(u_{123})\\
&-7/48\ Q(u_{123})P(u_1)P(u_{12}) + 1/12\ Q(u_{123})P(u_1)P(u_3)\\
&+1/48\ Q(u_{123})P(u_2)P(u_1) + 1/48\ Q(u_{123})P(u_2)P(u_{12})\\
&-5/48\ Q(u_{123})P(u_2)P(u_3) + 7/48\ Q(u_{123})P(u_2)P(u_{23})\\
&-1/48\ Q(u_{123})P(u_3)P(u_{23}) + 1/4\ P(u_{123})P(u_1)P(u_{12})\\
&-1/24\ P(u_{123})P(u_1)P(u_3) - 1/24\ P(u_{123})P(u_2)P(u_{12})\\
&-1/24\ P(u_{123})P(u_2)P(u_{23}) + 1/24\ P(u_{123})P(u_3)P(u_{23})\\
&+1/48\ P(u_1)\ c^2
\end{aligned}
$$

28. Addition 1 : construction du moule $loma^\bullet/lomi^\bullet$

Les cinq sections qui suivent ont été ajoutées fin août 2003.

Nous avons le choix, pour construitre $loma^\bullet$ entre deux développements aux vertus 'complémentaires'.

Le premier développement est *prodigue* ou *dispendieux* (*"wasteful expansion"*, cf [E6]) en ce sens qu'il exprime le moule $loma^\bullet$, dont les coefficients sont *rationnels* et les multipôles *clairsemés* [54] à partir des dilatés d'un moule, $Zag^\bullet_{III}$ ou son logarithme de Lie $Lozag^\bullet_{III} := logari\,(Zag^\bullet_{III})$, dont les coefficients sont *transcendants* et les multipôles *diffus* [55].

Le second développement est *habile* et *économique* (*"skilful expansion"*, cf [E6]) en ce sens qu'il exprime le moule $loma^\bullet$ à partir de moules beaucoup plus élémentaires, les $slang^\bullet_{\binom{n}{r}}$, qui ont des coefficients d'emblée rationnels et des pôles d'emblée clairsemés, mais qui possèdent chacun (contairement à $Zag^\bullet_{III}$ ou $Lozag^\bullet_{III}$) des multipôles à l'origine, lesquels se détruisent mutuellement au sein du développement.

Chacun des deux dévelopements opère dans l'algèbre ARI, mais tandis que le premier utilise les dilatatations δ^n de rapport entier n, le second utilise les projections τ^s sur les parties homogènes de poids s. Voici les définitions de ces opérateurs.

$$
\delta^n\, M^{\binom{u_1\ ,\dots,\ u_r}{v_1\ ,\dots,\ v_r}} \quad := \quad n^{-r}\ M^{\binom{u_1/n\ ,\dots,\ u_r/n}{v_1\ ,\dots,\ v_r}} \tag{129}
$$

$$
\tau^s\, M^{\binom{u_1\ ,\dots,\ u_r}{v_1\ ,\dots,\ v_r}} \quad := \quad M^{\binom{u_1\ ,\dots,\ u_r}{v_1\ ,\dots,\ v_r}}\|_{\boldsymbol{u}\text{-part of degree } s-r} \tag{130}
$$

La dilatation δ^n est bien sûr un automorphisme de ARI, mais pas le projecteur τ^s : chez toute composante de longueur r, il retient la partie $\boldsymbol{u}$-homogène de $\boldsymbol{u}$-degré total $s-r$.

[54] concentrés près des hyperplans-coordonnées.

[55] sur tout $\mathbb{Z}^r$

Le premier développement est surtout précieux pour la théorie : en effet, malgré le 'gaspillage' qu'il implique, il rend de grands services (je l'appelle *wasteful-useful*) du fait qu'il *s'inverse* (il permet de reconstituer $Zag^{\bullet}_{III}$ et même $Zag^{\bullet}$ tout entier à partir de $loma^{\bullet}$: voir §29) et qu'il fournit du même coup un procédé très général *pour passer de* $\mathrm{Zag}^{\bullet}$ *à* $\mathrm{zag}^{\bullet}$ *ou, si l'on préfère, pour transporter les propriétés algébriques des multizêtas numériques aux multizêtas formels.*

Le second développement est lui-aussi utile à la théorie, mais il est surtout indispensable dans les calculs pratiques – pour la *décomposition canonique en irréductibles* – car, comme son nom le suggère, il est effectivement beaucoup plus direct et économique.

Dans la recherche du premier développement, la difficulté majeure est d'effectuer l'élimination des *irrationnels* et des *multipôles 'superflus'* (en dehors de l'origine). Dans la recherche du second développement, au contraire, la difficulté majeure est d'assurer l'élimination des *multipôles 'inacceptables'* (ie situés à l'origine). Mais dans un cas comme dans l'autre, la clef de l'élimination consiste à placer, en face des multicrochets de ARI figurant dans les développements, des coefficients bien choisis, en fait uniquement déterminés, et qui, comme fonctions sur $\mathbb{N}^r$, rentrent dans une classe nouvelle de fonctions arithmétiques – les fonctions *périnomales* (cf [E6]) – qui jouent une rôle absolument central dans l'étude avancée des multizêtas (ie au "niveau 3", pour reprendre les distinctions du §11).

Premier développement ('wasteful') :

$$(131)\quad act(\mathrm{loma}^{\bullet}) = \sum \mathrm{Orr}_{\mathrm{III}}^{n_1,\dots,n_r}\, act(\delta^{n_1}\mathrm{Zag}^{\bullet}_{\mathrm{III}} - 1^{\bullet})\dots act(\delta^{n_r}\mathrm{Zag}^{\bullet}_{\mathrm{III}} - 1^{\bullet})$$

$$(132)\quad act(\mathrm{loma}^{\bullet}) = \sum \mathrm{Loorr}_{\mathrm{III}}^{n_1,\dots,n_r}\, act(\delta^{n_1}\mathrm{Lozag}^{\bullet}_{\mathrm{III}})\dots act(\delta^{n_r}\mathrm{Lozag}^{\bullet}_{\mathrm{III}})$$

(132) n'est que la transposition de (131). Ici, *act* désigne une action (n'importe laquelle – cela n'influe pas sur le résultat) de ARI/GARI dans BIMU. Le moule symétral $Orr^{\bullet}_{III}$ et son logarithme, le moule alternal $Loorr^{\bullet}_{III}$, sont uniquement déterminés et à valeurs rationnelles. Pour $Loorr^{\bullet}_{III}$, seules les composantes de longueur r impaires sont non-nulles. Du fait de l'alternalité de $Loorr^{\bullet}_{III}$, la relation (132) entre opérateurs équivaut en fait, par projection 'de Dynkin', à la relation suivante, strictement intérieure à

ARI :

$$(133)\quad \mathrm{loma}^\bullet = \sum \frac{1}{r}\ \mathrm{Loorr}_{\mathrm{III}}^{n_1,\dots,n_r}\ [[\delta^{n_1}\mathrm{Lozag}^\bullet_{\mathrm{III}}, \delta^{n_2}\mathrm{Lozag}^\bullet_{\mathrm{III}}]\dots\delta^{n_r}\mathrm{Lozag}^\bullet_{\mathrm{III}}]$$

Second développement ('skilful') :

$$(134)\quad act(\mathrm{loma}^\bullet) = act(\mathrm{slang}^\bullet_{\binom{1}{1}}) + \sum_{\substack{r_1+\dots r_s>s\\ s\ odd\geq 3}} \mathrm{lom}^{\binom{n_1\ ,\dots,\ n_s}{r_1\ ,\dots,\ r_s}}\ act(\mathrm{slang}^\bullet_{\binom{n_1}{r_1}})\dots act(\mathrm{slang}^\bullet_{\binom{n_s}{r_s}})$$

Ici $lom^\bullet$ désigne un moule scalaire :
– rigidement déterminé,
– alternal,
– à valeurs rationnelles,
– nul pour $r_1+\dots r_s$ pair.

L'inégalité $r_1+\dots r_s > s$ est essentielle : comme les r_i sont ≥ 1, elle montre que l'un au moins est >1, ce qui exprime bien que les multipôles de $loma^\bullet$ sont 'clairsemés', contairement à ceux de $Zag^\bullet$ etc, sont 'diffus'.[56]

Ingrédients du second développement :

$$(135)\quad \mathrm{slank}^\bullet_{\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}} := \mathrm{neginvar}\,.\,\mathrm{leng}_{\mathrm{r}}\,.\mathrm{adari}(\mathrm{ripal}^\bullet)\,.\,\mathrm{mu}(\mathrm{mupaj}^\bullet,\ \mathrm{leng}_1\,.\mathrm{H}^\bullet, \mathrm{paj}^\bullet)$$

$$(136)\quad \equiv \mathrm{pushinvar}_{\mathrm{r}}\,.\,\mathrm{leng}_{\mathrm{r}}\,.\,\mathrm{mu}(\mathrm{anti}\,.\,\mathrm{pal}^\bullet, \mathrm{garit}(\mathrm{pal}^\bullet)\,.\,\mathrm{leng}_1.\mathrm{H}^\bullet, \mathrm{pari}\,.\,\mathrm{pal}^\bullet)$$

$$(137)\quad \mathrm{slang}^\bullet_{\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}} := \mathrm{adari}(\mathrm{pal}^\bullet)\,.\,\mathrm{slank}^\bullet_{\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}}$$

$$(138)\quad \mathrm{slank}^\bullet_{\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}} \in \mathrm{ARI}_{\underline{al}/\underline{al}} \quad ; \quad \mathrm{slang}^\bullet_{\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}} \in \mathrm{ARI}_{\underline{al}/\underline{il}} \qquad (n, r\in\mathbb{N}^*)$$

Ici, $leng_r$ désigne le projecteur de $BIMU$ qui, chez tout bimoule, retient la composante de longueur r et annule toutes les autres. Les autres ingrédients du "second développement" sont les projecteurs :

$$(139)\quad \mathrm{neginvar} := 1+\mathrm{neg}$$

$$(140)\quad \mathrm{pushinvar}_{\mathrm{r}} := 1+\mathrm{push}+\mathrm{push}^2+\dots+\mathrm{push}^{\mathrm{r}}$$

[56]plus précisément, pour une composante donnée de longueur r , le nombre de multipôles de $loma^\bullet$ 'dans' la boule de rayon ρ est toujours un $o(\rho^{r-1})$ alors que pour $Zag^\bullet$ et ses trois facteurs, c'est un $O(\rho^r)$.

et les moules élémentaires :

$$(141)\qquad \mathrm{paj}^{w_1,\dots,w_r} := P(u_{1,\dots,r})\,P(u_{2,\dots,r})\dots P(u_r)$$

$$(142)\qquad \mathrm{mupaj}^{w_1,\dots,w_r} := (-1)^r\,P(u_1)\,P(u_{1,2})\dots P(u_{1,\dots,r})$$

$$(143)\qquad \mathrm{Pa}_n^{w_1} := \frac{n}{u_1-n} \quad \mathit{et} \quad \mathrm{Pa}_n^{w_1,\dots,w_r} := 0 \qquad \forall r\geq 2$$

29. Addition 2 : complément sur la décomposition canonico-explicite

Voici les formules-clef pour la décomposition des multizêtas *numériques* (facteurs $\mathrm{Zag}^\bullet_{\mathrm{II}}, \mathrm{Zag}^\bullet_{\mathrm{III}}$) et *formels* (facteurs $\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{II}}, \mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{III}}$) en irréductibles[57] :

$$(144)\quad act(\mathrm{Zag}^\bullet_{\mathrm{II}}) = 1+\sum \mathrm{Urr}_{\mathrm{II}}{}^{n_1,\dots,n_r}\ act(\delta^{n_1}\mathrm{loma}^\bullet)\dots act(\delta^{n_r}\mathrm{loma}^\bullet)$$

$$(145)\quad act(\mathrm{Zag}^\bullet_{\mathrm{III}}) = 1+\sum \mathrm{Urr}_{\mathrm{III}}{}^{n_1,\dots,n_r}\ act(\delta^{n_1}\mathrm{loma}^\bullet)\dots act(\delta^{n_r}\mathrm{loma}^\bullet)$$

$$(146)\quad act(\mathrm{Zag}^\bullet_{\mathrm{II}}) = 1+\sum \mathrm{Irr}_{\mathrm{II}}{}^{s_1,\dots,s_r}\ act(\tau^{n_1}\mathrm{loma}^\bullet)\dots act(\tau^{n_r}\mathrm{loma}^\bullet)$$

$$(147)\quad act(\mathrm{Zag}^\bullet_{\mathrm{III}}) = 1+\sum \mathrm{Irr}_{\mathrm{III}}{}^{s_1,\dots,s_r}\ act(\tau^{s_1}\mathrm{loma}^\bullet)\dots act(\tau^{s_r}\mathrm{loma}^\bullet)$$

$$(148)\quad act(\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{II}}) = 1+\sum \mathrm{irr}_{\mathrm{II}}{}^{s_1,\dots,s_r}\ act(\tau^{s_1}\mathrm{loma}^\bullet)\dots act(\tau^{s_r}\mathrm{loma}^\bullet)$$

$$(149)\quad act(\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{III}}) = 1+\sum \mathrm{irr}_{\mathrm{III}}{}^{s_1,\dots,s_r}\ act(\tau^{s_1}\mathrm{loma}^\bullet)\dots act(\tau^{s_r}\mathrm{loma}^\bullet)$$

Les formules (144),(145) permettent de reconstituer $\mathrm{Zag}^\bullet$ à partir des dilatés du moule 'rationnel'[58] *loma*$^\bullet$ et de deux moules scalaires, $\mathrm{Urr}_{\mathrm{II}}{}^\bullet$ et $\mathrm{Urr}_{\mathrm{III}}{}^\bullet$, qui sont symmétrals et à valeurs entières. Les seules composantes non nulles du moule alternal $\mathrm{Lourr}_{\mathrm{II}}{}^\bullet = \log(\mathrm{Urr}_{\mathrm{II}}{}^\bullet)$ (resp $\mathrm{Lourr}_{\mathrm{III}}{}^\bullet = \log(\mathrm{Urr}_{\mathrm{III}}{}^\bullet)$ sont celles de longueur r paire (resp impaire).

Les formules (146),(147) permettent de reconstituer $\mathrm{Zag}^\bullet$ à partir des parties homogènes[59] du moule *loma*$^\bullet$ et de deux moules scalaires, $\mathrm{Irr}_{\mathrm{II}}{}^\bullet$ et $\mathrm{Irr}_{\mathrm{II}}{}^\bullet$, qui sont symmétrals et à valeurs dans l'anneau $\mathbb{Z}eta_{\mathrm{II}}$ (resp $\mathbb{Z}eta_{\mathrm{III}}$) des multizêtas numériques ; cf §15. Les seules composantes non nulles du moule alternal $\mathrm{Loirr}_{\mathrm{II}}{}^\bullet = \log(\mathrm{Irr}_{\mathrm{II}}{}^\bullet)$ (resp $\mathrm{Loirr}_{\mathrm{III}}{}^\bullet = \log(\mathrm{Irr}_{\mathrm{III}}{}^\bullet)$ sont celles de longueur r paire (resp impaire).

Enfin, les formules (148),(149) permettent de reconstituer $\mathrm{zag}^\bullet$, autrement dit le moule qui regroupe les fonctions génératrices de tous les multizêtas formels, de tous poids et de toutes longueurs, à partir des parties

[57] Le premier facteur $\mathrm{Zag}^\bullet_{\mathrm{I}} = \mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{I}}$, commun aux multizêtas numériques et aux multizêtas formels et de statut très spécial, est analysé en §30 infra. Mais il ne compte pas ici, car il ne porte que l'irréductible banal π^2.

[58] ce sont les *coefficients* de Taylor de ses composantes qui sont rationnels. Mais comme *fonctions méromorphes*, les composantes de longueurs $r \geq 3$ sont transcendantes.

[59] ie homogènes de poids total $3,5,7\dots$ et de degré total $3-r, 5-r, 7-r\dots$

homogènes[60] du moule $loma^\bullet$ et de deux moules scalaires, $\mathrm{irr}_{\mathrm{II}}{}^\bullet$ et $\mathrm{irr}_{\mathrm{III}}{}^\bullet$, qui sont symmétrals et à valeurs libres dans $\mathbb{C}$. Les seules composantes non nulles du moule alternal $\mathrm{loirr}_{\mathrm{II}}{}^\bullet = \log(\mathrm{irr}_{\mathrm{II}}{}^\bullet)$ (resp $\mathrm{loirr}_{\mathrm{III}}{}^\bullet = \log(\mathrm{irr}_{\mathrm{III}}{}^\bullet)$ sont celles de longueur r paire (resp impaire).

Non seulement ces énoncés résolvent le problème du classement et du décompte des irréductibles formels, mais ils en fournissent également une base d'irréductibles extrêmement simple et indiscutablement canonique. Posons en effet :

$$\mathrm{Zag}^\bullet = \mathrm{gari}^\bullet\,(\mathrm{Zag}^\bullet_{\mathrm{I}}\,,\,\mathrm{Zag}^\bullet_{\mathrm{II}}\,,\,\mathrm{Zag}^\bullet_{\mathrm{III}}) \tag{150}$$

$$\mathrm{Urr}^\bullet \ := 1^\bullet \times \mathrm{Urr}^\bullet_{\mathrm{II}} \times \mathrm{Urr}^\bullet_{\mathrm{III}} \tag{151}$$

$$\mathrm{Irr}^\bullet \ := \mathrm{Irr}^\bullet_{\mathrm{I}} \times \mathrm{Irr}^\bullet_{\mathrm{II}} \times \mathrm{Irr}^\bullet_{\mathrm{III}} \tag{152}$$

$$\mathrm{Irr}^\bullet_{\mathrm{I}} \ := \exp(\pi^2/6\ I^\bullet) \tag{153}$$

$$\mathrm{Irr}^\bullet_{*} \ := \mathrm{Irr}^\bullet_{\mathrm{II}} \times \mathrm{Irr}^\bullet_{\mathrm{III}} \tag{154}$$

$$\mathrm{zag}^\bullet = \mathrm{gari}^\bullet\,(\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{I}}\,,\,\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{II}}\,,\,\mathrm{zag}^\bullet_{\mathrm{III}}) \tag{155}$$

$$\mathrm{irr}^\bullet \ := \mathrm{irr}^\bullet_{\mathrm{I}} \times \mathrm{irr}^\bullet_{\mathrm{II}} \times \mathrm{irr}^\bullet_{\mathrm{III}} \tag{156}$$

$$\mathrm{irr}^\bullet_{\mathrm{I}} \ := \exp(\pi^2/6\ I^\bullet) \tag{157}$$

$$\mathrm{irr}^\bullet_{*} \ := \mathrm{irr}^\bullet_{\mathrm{II}} \times \mathrm{irr}^\bullet_{\mathrm{III}} \tag{158}$$

Vu les restrictions de 'parité' auxquelles sont astreints les facteurs symmétrals $\mathrm{irr}^\bullet_{\mathrm{II}}$ et $\mathrm{irr}^\bullet_{\mathrm{III}}$ (ou, plus directement, leurs logarithmes alternals) il est très facile de voir que la donnée du produit $\mathrm{irr}^\bullet_{*}$ équivaut exactement à la donnée simultanée de ses deux facteurs. Au bout du compte, nous avons ce résultat :

Avec le symbole $Irr^2_I =$ "$\pi^2/6$"*, le moule libre-symmétral*[61] *:*

$$Irr^\bullet_* = \{Irr^{s_1,s_2,\ldots,s_r} \in \mathbb{C}\}\ ,\ r = 1,2,3\ldots\ ,\ s_i \in 3,5,7,9,11,13\ldots \tag{159}$$

constitue un système complet et libre d'irréductibles (ou, si l'on préfère, de générateurs) pour le $\mathbb{Q}$*-anneau polynomial des multizêtas formels. Qui plus est, ce système est compatible tant avec la filtration naturelle par les longueurs* r *qu'avec la graduation naturelle par les poids* $\mathrm{s} := \sum \mathrm{s_i}$.

Remarque 1 : symétralité naturelle.
Il serait très facile de tirer de là, en passant au logarithme moulien libre-alternal $loirr^\bullet_* := \log(irr^\bullet_*)$ et en prenant, pour toute longueur r et tout ensemble non ordonné $\{s_1,\ldots,s_r\}$, une base dans l'algèbre de Lie libre associée, un système d'irréductibles libres "tout court", ie sans aucune restriction, mais cela n'avancerait à rien : on y perdrait un peu de 'canonicité'

[60] ie homogènes de poids total $3,5,7\ldots$ et de degré total $3-r, 5-r, 7-r\ldots$

[61] ie astreint à la seule condition de symétralité et à aucune autre.

et on n'y gagnerait rien en contrepartie : cf [E6]. En fait, c'est 'naturellement' sous forme de moule symétral que les irréductibles se présentent et c'est là un aspect qu'il faut 'respecter'.

Remarque 2 : vers des dérivations numériques.
L'existence du système canonique $irr_*^\bullet$ d'irréductibles fournit aussitôt l'existence, sur le $\mathbb{Q}$-anneau des multizêtas formels, de deux systèmes de derivations, canoniques eux-aussi, $\{L_s,\ s \text{ impair} \geq 3\}$ et $\{R_s,\ s \text{ impair} \geq 3\}$, d'action :

$$\mathrm{L}_{s_0}\, \mathbb{Q} := 0 \quad ; \quad \mathrm{R}_{s_0}\, \mathbb{Q} := 0 \tag{160}$$

$$L_{s_0}\, \mathrm{irr}_*^{s_1,\ldots,s_r} \ := \mathrm{irr}_*^{s_2,\ldots,s_r} \quad si \ \ s_0 = s_1 \ \ (resp \ = 0 \ \ si \ \ s_0 \neq s_1) \tag{161}$$

$$R_{s_0}\, \mathrm{irr}_*^{s_1,\ldots,s_r} \ := \mathrm{irr}_*^{s_1,\ldots,s_{r-1}} \quad si \ \ s_0 = s_r \ \ (resp \ = 0 \ \ si \ \ s_0 \neq s_r) \tag{162}$$

Mais l'important n'est évidemment pas l'existence de telles dérivations 'formelles'. L'important est que, du fait de leur 'canonicité, ces opérateurs L_{s_0} et R_{s_0} semblent :
(i) pouvoir "passer" au $\mathbb{Q}$-anneau des multizêtas numériques et surtout
(ii) y être (ie dans ce nouvel anneau) susceptibles d'une nouvelle définition, *indépendante* de la première et garantissant *directement* (ie sans recours à la construction formelle) leur caractère de dérivation.

Si la chose se confirmait (mais il reste beaucoup à faire) on tiendrait là un outil très efficace pour élucider l'arithmétique des 'vrais' multizêtas et, à terme, pour montrer l'isomorphie du $\mathbb{Q}$-anneau des multizêtas numériques et du $\mathbb{Q}$-anneau des multizêtas formels.

30. Addition 3 : complément sur l'associateur canonico-rationnel

Le facteur $\mathrm{Zag}_{\mathrm{I}}^\bullet$ ne porte que des puissances de π^2 – ou, après renormalisation, que des coefficients rationnels. Il n'importe donc pas pour la recherche des irréductibles, mais il importe beaucoup dans une autre branche de la théorie, du fait qu'il fournit [62], par le biais de ses coefficients de Taylor, un *associateur de Drinfeld* [63] *à la fois rationnel* (ce qui est banal) mais surtout *explicite et canonique* (ce qui est beaucoup plus inattendu). On pourrait certes le définir par division à droite (dans GARI) de $Zag_{\mathrm{I}}^\bullet$ par $Zag_{\mathrm{II}}^\bullet$ et $Zag_{\mathrm{III}}^\bullet$ mais il est bien plus satisfaisant d'en donner une construction directe, au moyen des factorisations :

$$\mathrm{Zag}_{\mathrm{I}}^\bullet = \mathrm{gari}^\bullet\,(\mathrm{tal}^\bullet, \mathrm{expari}(\mathrm{viroma}^\bullet), \mathrm{invgari}(\mathrm{pal}^\bullet)) \tag{163}$$

$$= \mathrm{gari}^\bullet\,(\mathrm{tal}^\bullet, \mathrm{invgari}(\mathrm{pal}^\bullet), \mathrm{expari}(\mathrm{roma}^\bullet)) \tag{164}$$

[62] sous réserve évidemment que les "relations quadratiques" impliquent les "relations gonales" : cf §31 et §32 infra.
[63] cf [D].

$$(165)\quad \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{al}}} \ni act(\mathrm{viroma}^\bullet) = act(\mathrm{slank}^\bullet_{\binom{1}{1}}) + \sum_{\substack{r_1+\ldots r_s>s\\ s\ even\geq 2}} \mathrm{rom}^{\binom{n_1\ ,\ldots,\ n_s}{r_1\ ,\ldots,\ r_s}}\ act(\mathrm{slank}^\bullet_{\binom{n_1}{r_1}})\ldots act(\mathrm{slank}^\bullet_{\binom{n_s}{r_s}})$$

$$(166)\quad \mathrm{ARI}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{il}}} \ni act(\mathrm{roma}^\bullet) = act(\mathrm{slang}^\bullet_{\binom{1}{1}}) + \sum_{\substack{r_1+\ldots r_s>s\\ s\ even\geq 2}} \mathrm{rom}^{\binom{n_1\ ,\ldots,\ n_s}{r_1\ ,\ldots,\ r_s}}\ act(\mathrm{slang}^\bullet_{\binom{n_1}{r_1}})\ldots act(\mathrm{slang}^\bullet_{\binom{n_s}{r_s}})$$

et d'un moule $rom^\bullet$ (le même dans (165) et (166)) qui est :
– uniquement déterminé,
– à valeurs rationnelles,
– de type alternal,
– perinomal en les "variables de dilatation" n_i,
– nul pour $r_1 + \ldots r_s$ impair.

Ici encore, les inégalités $r_1+\cdots+r_s > s$ impliquent que l'un au moins des r_i est ≥ 2, ce qui exprime la "rareté" des multipôles de $roma^\bullet$ et $viroma^\bullet$, en contraste avec l'"abondance" des multipôles de $tal^\bullet$.

31. Addition 4 : les relations "quadratiques" impliquent la relation "digonale"

Il existe de ce fait plusieurs démonstrations. Indiquons la plus conceptuelle – celle aussi qui semble le mieux se généraliser à des problèmes voisins.

Au niveau des multizêtas scalaires, "vérifier la relation digonale" signifie "être invariant sous l'involution de Hoffman". Au niveau des fonctions génératrices dans GARI ou de leurs 'logarithmes' dans ARI, cela signifie "être invariant sous l'automorphisme involutif *dig*". Le plus simple, pour définir *dig*, est de recourir au procédé d'*amplification*, qui nous a déjà permis, au §8, de construire le moule $zag^\bullet$ à partir du moule $wa^\bullet$. Cette fois-ci, nous appliquons le procédé à deux moules $\mathrm{Ra}^\bullet$ et $\mathrm{La}^\bullet$, d'indices tous égaux à 0 ou 1. Ici encore, nous selectionnons 0 comme *indice d'amplification* et nous nommons u_i les *variables d'amplification*. La définition générale (cf (34)) donne alors pour les composantes (r, d) (longueur r et degré d) de l'amplifié :

$$\mathrm{amp_{r,d}Ra}^{\left[\substack{1\ ,\ldots,\ 1\\ u_1\ ,\ldots,\ u_r}\right]} := \sum_{d_1+\ldots d_r=d} \mathrm{Ra}^{1,0^{[d_1]},\ldots,1,0^{[d_r]}}(u_1)^{d_1}\ldots(u_1+u_2\cdots+u_r)^{d_r}$$

$$\mathrm{amp_{r,d}La}^{\left[\substack{1\ ,\ldots,\ 1\\ u_1\ ,\ldots,\ u_r}\right]} := \sum_{d_1+\ldots d_r=d} \mathrm{La}^{1,0^{[d_1]},\ldots,1,0^{[d_r]}}(u_1)^{d_1}\ldots(u_1+u_2\cdots+u_r)^{d_r}$$

avec des sommes étendues à tous les $d_i \geq 0$, si bien que les séquences $0^{[d_i]}$ séparant deux “1” consécutifs peuvent être vides : la seule contrainte porte sur le terme initial, qui doit toujours être un “1”. Regardons maintenant $\mathrm{Ra}^\bullet$ et $\mathrm{La}^\bullet$ comme deux moules alternals (resp symétrals) *libres*, c'est-à-dire soumis aux seules contraintes d'alternalité (resp symétralit'e), mais se correspondant sous l'involution de Hoffman, qui inverse les séquences faites de “0” et de “1”, tout en échangeant 0 et 1. Autrement dit :

$$\mathrm{La}^{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_1} \equiv \mathrm{Ra}^{\overline{\epsilon_r},\ldots,\overline{\epsilon_1}} \qquad avec \quad \overline{0} := 1 \quad et \quad \overline{1} := 0 \tag{167}$$

Les moules $\mathrm{amp_{r,d}Ra}^\bullet$ et $\mathrm{amp_{r,d}La}^\bullet$, comme amplifiés des moules alternals (rep symétrals), sont eux-mêmes alternals (resp symétrals [64]) et la correspondance (167) entre $\mathrm{Ra}^\bullet$ et $\mathrm{La}^\bullet$ induit évidemment une bijection, notée *dig* , entre chaque cellule $\mathrm{Al_{r,d}}$ et sa symétrique $\mathrm{Al_{d,r}}$.

Première étape.

On montre alors, en recourant aux notations usuelles[65], les identités suivantes, valables pour toute paire $A^\bullet, B^\bullet \in \mathrm{ARI}_{\mathrm{al}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}$:

$$\mathrm{dig\ limu}(A^\bullet, B^\bullet) \equiv -\mathrm{limu}(\mathrm{dig}\, A^\bullet, \mathrm{dig}\, B^\bullet) \tag{168}$$

$$\mathrm{dig\ arit}(A^\bullet)\, B^\bullet \equiv \mathrm{arit}(\mathrm{dig}\, A^\bullet)\, \mathrm{dig}\, B^\bullet - \mathrm{limu}(\mathrm{dig}\, A^\bullet, \mathrm{dig}\, B^\bullet) \tag{169}$$

$$\mathrm{dig\ ari}(A^\bullet, B^\bullet) \equiv \mathrm{limu}(\mathrm{dig}\, A^\bullet, \mathrm{dig}\, B^\bullet) \tag{170}$$

$$\mathrm{dig\ expari}(A^\bullet) \equiv \mathrm{expari}(\mathrm{dig}\ A^\bullet) \tag{171}$$

(168) est immédiate. (169) l'est moins, mais se démontre sans calcul (cf [E6]). (170) résulte de (168) et (169) moyennant (48). Enfin, (171) résulte ausi de (168),(169) moyennant l'expression de *expari* en fonction des (cf [E6]) seules opérations *mu* et *arit.*

Ces relations acquises, toutes les étapes suivantes en découlent mécaniquement. Indiquons-les sous forme d'implications.

[64] sous réserve que $Ra^0 = La^0 = 0$, ce qui sera bien le cas ici : c'est la convention de normalisation des multizêtas formels “divergents”.

[65] avec les abréviations usuelles :
al:=*alternal* , *as*:=*symétral* , *dig*:= dig-*invariant* ,
u-*ent* := “entier en les u_i” , **v**-*cst* := “constant en les v_i.

Deuxième étape.

$$\text{dig} \; : \mathrm{ARI}_{\mathrm{al}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \overset{isom.}{\longrightarrow} \mathrm{ARI}_{\mathrm{al}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \tag{172}$$

$$\text{dig} \; : \mathrm{GARI}_{\mathrm{as}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \overset{isom.}{\longrightarrow} \mathrm{GARI}_{\mathrm{as}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \tag{173}$$

$$\text{expari} \; : \mathrm{ARI}_{\mathrm{al,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \longrightarrow \mathrm{GARI}_{\mathrm{as,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \tag{174}$$

$$\text{logari} \; : \mathrm{GARI}_{\mathrm{as,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \longrightarrow \mathrm{ARI}_{\mathrm{al,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \tag{175}$$

Troisième étape.

$$\mathrm{Zag} \in \mathrm{GARI}_{\mathrm{as,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \Longrightarrow \mathrm{invgari}(\mathrm{Zag}^\bullet) \in \mathrm{GARI}_{\mathrm{as,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \tag{176}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{nepar}\,\mathrm{invgari}(\mathrm{Zag}^\bullet) \in \mathrm{GARI}_{\mathrm{as,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \tag{177}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Zag}_{\mathrm{III}}^\bullet \in \mathrm{GARI}_{\mathrm{as,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \tag{178}$$

Quatrième étape.

$$\mathrm{Zag}_{\mathrm{III}}^\bullet \in \mathrm{GARI}_{\mathrm{as,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \Longrightarrow \mathrm{Lozag}_{\mathrm{III}}^\bullet \in \mathrm{ARI}_{\mathrm{al,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \tag{179}$$

Cinquième étape.

$$\mathrm{Lozag}_{\mathrm{III}}^\bullet \in \mathrm{ARI}_{\mathrm{al,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \Longrightarrow \mathrm{loma}^\bullet \in \mathrm{ARI}_{\mathrm{al,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \tag{180}$$

$$\mathrm{loma}^\bullet \in \mathrm{ARI}_{\mathrm{al,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \Longrightarrow \mathrm{lozag}_{\mathrm{III}}^\bullet \in \mathrm{ARI}_{\mathrm{al,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \tag{181}$$

$$\mathrm{loma}^\bullet \in \mathrm{ARI}_{\mathrm{al,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \Longrightarrow \mathrm{lozag}_{\mathrm{II}}^\bullet \in \mathrm{ARI}_{\mathrm{al,dig}}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst} \tag{182}$$

C'est l'étape principale. Elle consiste, au moyen du seul crochet de ARI et des trois relations suivantes [66] :

$$\mathrm{loma}^\bullet = \sum \frac{1}{r}\, \mathrm{Loorr}_{\mathrm{III}}^{n_1,\dots,n_r}\, [[\delta^{n_1}\mathrm{Lozag}_{\mathrm{III}}^\bullet, \delta^{n_2}\mathrm{Lozag}_{\mathrm{III}}^\bullet] \dots \delta^{n_r}\mathrm{Lozag}_{\mathrm{III}}^\bullet] \tag{183}$$

$$\mathrm{lozag}_{\mathrm{II}}^\bullet = \sum \frac{1}{r}\, \mathrm{loirr}_{\mathrm{II}}^{s_1,\dots,s_r}\, [[\tau^{s_1}\mathrm{loma}^\bullet, \tau^{s_1}\mathrm{loma}^\bullet] \dots \tau^{s_r}\mathrm{loma}^\bullet] \tag{184}$$

$$\mathrm{lozag}_{\mathrm{III}}^\bullet = \sum \frac{1}{r}\, \mathrm{loirr}_{\mathrm{III}}^{s_1,\dots,s_r}\, [[\tau^{s_1}\mathrm{loma}^\bullet, \tau^{s_1}\mathrm{loma}^\bullet] \dots \tau^{s_r}\mathrm{loma}^\bullet] \tag{185}$$

à exprimer les moules $\mathrm{lozag}_{\mathrm{II}}^\bullet$ et $\mathrm{lozag}_{\mathrm{III}}^\bullet$ [67] (en passant par l'intermédiaire du moule *loma*$^\bullet$ mais sans se soucier de sa forme) en fonction du seul

[66] qui transposent dans ARI les relations opératorielles (avec *act*) de (132),(146),(147).

[67] initiales minuscules $\Rightarrow$ multizêtas formels.

moule $\mathrm{Lozag}^{\bullet}_{\mathrm{III}}$ [68] et de *transporter les propriétés (ici : la* dig-*invariance) de celui-ci à ceux-là.*

Sixième étape.

$$\mathrm{lozag}^{\bullet}_{\mathrm{II}} \quad et \quad \mathrm{lozag}^{\bullet}_{\mathrm{III}} \in \mathrm{ARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}_{\mathrm{al,dig}} \quad \Longrightarrow \tag{186}$$

$$\mathrm{zag}^{\bullet}_{\mathrm{II}} \quad et \quad \mathrm{zag}^{\bullet}_{\mathrm{III}} \quad et \quad \mathrm{zag}^{\bullet} \in \mathrm{GARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}_{\mathrm{as,dig}} \tag{187}$$

CQFD.

32. Addition 5 : complément sur les relations "hexgonale" et "pentagonale"

La démarche précédente devrait en principe s'adapter à la déduction des relations hexagonale et pentagonale. Considérons les trois lignes suivantes – une pour chaque relation gonale :

$$\begin{array}{llllll}
\mathrm{ARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{il}},\ \mathrm{dig}} & , & \mathrm{ARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}_{\mathrm{codig,\ dig}} & , & \mathrm{ARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}_{\mathrm{al,\ dig}} & \\
\mathrm{ARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{il}},\ \mathrm{hexag}} & , & \mathrm{ARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}_{\mathrm{cohexag,\ hexag}} & , & \mathrm{ARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}_{\mathrm{al,\ hexag}} & ? \\
\mathrm{ARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}_{\underline{\mathrm{al}}/\underline{\mathrm{il}},\ \mathrm{pentag}} & , & \mathrm{ARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}_{\mathrm{copentag,\ pentag}} & , & \mathrm{ARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}_{\mathrm{al,\ pentag}} & ?
\end{array}$$

Intéressons-nous par exemple à la seconde ligne, relative à la relation hexagonale. Pour pouvoir dupliquer la démarche de la section précédente, il suffirait de trouver une condition *cohexag* qui, jointe à *hexag*, définisse une sous-algèbre de $\mathrm{ARI}^{\mathbf{u}\text{-}ent,\mathbf{v}\text{-}cst}$, puis de raisonner exactement comme ci-dessus. Un peu d'heuristique montre que la condition "maximale", ie *cohexag* $:= \underline{al}/\underline{il}$, convient très probablement. Mais elle est très forte et mal exploitable. D'où l'intérêt de l'affaiblir. L'idéal serait de pouvoir prendre la condition "minimamle", ie *cohexag := al* comme à la première ligne, où on a vu que le choix *codig := al* faisait l'affaire. Or les premiers tests semblent montrer que les choix *cohexag := al* et aussi *copentag := al* conviennent effectivement. Mais le travail reste à faire.

De toute façon, la vérité de l'implication :
"relations quadratiques" $\Rightarrow$ *"relations hexagonale et pentagonale"*
ne fait guère de doute. J'ajouterai que, dans une théorie comme celle-ci, si riche en *surprises vraies*, il y peut-être plus prioritaire que de s'évertuer à démontrer ce qui est "sans surprise" et "certain d'avance" – d'autant que ces énoncés-là tendent à "tomber" tout seuls, au fur et à mesure justement que s'accumulent les résultats *intéressants* et *"à surprise"* .

---

[68] initiales majuscules $\Rightarrow$ multizêtas numériques.

Bibliographie

[Ap] R. APÉRY, *Irrationalité de* $\zeta(2)$ *et* $\zeta(3)$. Astérisque **61** (1979), 11–13.

[Bro] D. J. BROADHURST, *Conjectured Enumeration of irreducible Multiple Zeta Values, from Knots and Feynman Diagrams*, preprint, Physics Dept., Open University Milton Keynes, MK7 6AA, UK, Nov. 1996.

[Bor] J. BORWEIN, *Three Adventures : Symbolically Discovered Identities for* $\zeta(4n+3)$ *and like matters*, July 14, 1997, Vienna, 9th Intern. Conference on Formal Power Series and Algebraic Combinatoics (available at : www. cecm. sfu. ca /preprints/)

[C] H. COHEN, *Démonstration de l'irrationalité de* $\zeta(3)$ *(d'après Apéry)*. Séminaire de Théorie des Nombres de Grenoble, VI.1–VI.9, 1978.

[D] V. G. DRINFEL'D, *On quasi-triangular quasi-Hopf algebras and some groups related to* $Gal(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Leningrad Math. J. **2** (1991), 829–860.

[Eu] L. EULER, *Opera Omnia*, Ser.1, Vol XV, Teubner, Berlin, 1997, pp 217-267.

[E1] J. ECALLE, *Théorie des invariants holomorphes.* PhD , Orsay, 1974. The first part appeared in Journ. Math. Pures et Appl. **54** (1974).

[E2] J. ECALLE, *Les fonctions résurgentes, Vol.1,2,3.* Publ. Math. Orsay, 1981–1985.

[E3] J. ECALLE, *Weighted products and parametric resurgence.* in : Méthodes résurgentes, Travaux en Cours, 47, pp 7–49, 1994, Ed. L.Boutet de Monvel.

[E4] J. ECALLE, *A Tale of Three Structures : the Arithmetics of Multizetas, the Analysis of Singularities, the Lie algebra ARI.* To appear in the Proceedings of the Mai 2001 Groningen Workshop on Singularities and Stokes Phenomena.

[E5] J. ECALLE, *ARI/GARI, Dimorphy, and Multizetas* : soon available on my Orsay WEB page.

[E6] J. ECALLE, *Six lessons on the canonical-explicit decomposition of multizetas into irreducibles*, based on a DEA course delivered at Orsay in May-June 2003 ; to be submitted to the Ann. Toulouse ; soon on my Orsay WEB page.

[G1] A. B. GONCHAROV, *Polylogarithms in arithmetic and geometry.* Proc. ICM-94, Zurich, 1995, pp. 374-387

[G2] A. B. GONCHAROV, *Multiple polylogarithms, Cyclotomy and Modular Complexes.* Math. Research Letters **5** (1998), 497–515.

[K] V. G. KAC, *Lie Superalgebras.* Adv. Math. **26** (1977), 8–96

[MP] H. N. MINH, M. PETITOT, *Lyndon words, polylogarithms and the Riemann* ζ *function.* submitted to Disc. Math.

[R] T. RIVOAL, *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers impairs.* Thèse, Caen, 2001.

[S] M. SCHEUNERT, *The theory of Lie superalgebras. An introduction.* Springer, 1979.

[Z] D. ZAGIER, *Values of Zeta Functions and their Applications.* First European Congress of Mathematics, Vol. 2, 427-512, Birkhäuser, Boston, 1994.

Jean ECALLE
Dpartement de Mathmatiques
Bt. 425, bureau 152
Universit Paris-Sud
91405 Orsay Cedex
France
E-mail : Jean.Ecalle@math.u-psud.fr