Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 551–559

Indépendance linéaire des valeurs des polylogarithmes

par Tanguy RIVOAL

Résumé. Nous montrons que pour tout rationnel α de $[-1,1]$, l'ensemble des valeurs des polylogarithmes $\{\mathrm{Li}_s(\alpha), s \in \mathbb{N},\ s \geq 1\}$ contient une infinité de nombres $\mathbb{Q}$–linéairement indépendants.

Abstract. We prove that for any rational $\alpha \in [-1,1]$, the set of the values of polylogarithms $\{\mathrm{Li}_s(\alpha), s \in \mathbb{N},\ s \geq 1\}$ contains infinitely many $\mathbb{Q}$–linearly independant numbers.

1. Introduction

L'étude diophantienne des valeurs des fonctions polylogarithmes $\mathrm{Li}_s(z)$, définies pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| \leq 1$ et $s \geq 1$ (et $z \neq 1$ si $s = 1$) par

$$\mathrm{Li}_s(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^s},$$

en des points rationnels a été abordée dans [Ni] et [Ha], entre autres. Nikishin [Ni] montre par exemple que, pour tout entier $a \geq 1$, si $p \in \mathbb{N}$, $q \in -\mathbb{N}$ et $|q| > p^a(4a)^{a(a-1)}$, alors les nombres $1, \mathrm{Li}_1(p/q)$, $\mathrm{Li}_2(p/q), \ldots$, $\mathrm{Li}_a(p/q)$ sont $\mathbb{Q}$–linéairement indépendants. Hata [Ha] établit les résultats correspondants lorsque $p/q > 0$. Dans cet article, nous abordons ce problème sous un angle différent en minorant la dimension

$$\delta_\alpha(a) = \dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} + \mathbb{Q}\mathrm{Li}_1(\alpha) + \mathbb{Q}\mathrm{Li}_1(\alpha) + \cdots + \mathbb{Q}\mathrm{Li}_a(\alpha))$$

pour *tout* rationnel $\alpha = p/q$, et non pas soumis à des restrictions portant sur p et q, comme dans [Ni] et [Ha].

Théorème 1. *Soit a un entier ≥ 2 et $\alpha = p/q$ un nombre rationnel, $0 < |\alpha| < 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $A(\varepsilon, p, q)$ tel que si $a \geq A(\varepsilon, p, q) \geq 1$,*

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{1-\varepsilon}{1+\log(2)} \log(a).$$

Une conséquence imméditate est le

Manuscrit reçu le 5 juin 2002.

Cet article correspond au chapitre 2 de la thèse de doctorat de l'auteur [Ri2].

Corollaire 1. *Pour tout rationnel α, $0 < |\alpha| < 1$, l'ensemble $\{\mathrm{Li}_s(\alpha), s \geq 1\}$ contient une infinité de nombres irrationnels.*

Remarques.

1. La constante $A(\varepsilon, p, q)$ est effectivement calculable : on peut d'ailleurs la remplacer par 1, au prix d'une constante ([1]) moins bonne à la place de $(1-\varepsilon)/(1+\log(2))$.

2. On peut démontrer un résultat similaire dans le cas des *fonctions de Lerch* définies pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ et $s \geq 1$ par

$$\Phi_s(z, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+\omega)^s},$$

lorsque $\omega = u/v$ est un rationnel positif. Avec des notations évidentes, on montre facilement que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $A = A(\varepsilon, p, q) \geq 1$ et un réel $c = c(\varepsilon, v) > 0$ tel que si $a \geq A$, $\delta_{\alpha,\omega}(a) \geq c \log(a)$.

3. La restriction aux nombres rationnels n'est pas essentielle : on étend facilement le Théorème 1 aux nombres algébriques réels α : la minoration devient alors

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{1}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]} \cdot \frac{1-\varepsilon}{1+\log(2)} \log(a).$$

Dans le cas des algébriques complexes, la démonstration du Lemme 3 n'est en revanche plus valide. Il faudrait utiliser la *méthode du col* (cf. [Ri2, chapitre 4] pour un exemple où elle est mise en œuvre) pour espérer minorer $\delta_\alpha(a)$, ce qui est un problème difficile en général.

4. Si $s > 1$, $\mathrm{Li}_s(1) = \zeta(s)$, $\mathrm{Li}_s(-1) = (1-2^{1-s})\zeta(s)$ et $\mathrm{Li}_1(-1) = -\log(2)$. Comme $\zeta(2n) \in \mathbb{Q}\pi^{2n}$, on sait qu'*a priori* ([2]) $\delta_{-1}(a) \geq \delta_1(a) \geq [a/2]$. Le Théorème 1 est donc encore vrai mais trivial lorsque $z = \pm 1$.

5. Dans [Ri1] (cf. également [BR]), une méthode est introduite pour éliminer les "parasites" $\zeta(2n)$ lorsque $z = \pm 1$, ce qui permet de montrer qu'une infinité des nombres $\zeta(2n+1)$ sont irrationnels.

2. Notations

La démonstration repose sur la série suivante ([3])

$$N_{n,a,r}(z) = n!^{a-r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)(k-2)\cdots(k-rn)}{k^a(k+1)^a\cdots(k+n)^a} z^{-k}$$

[1] cette constante est elle-aussi effectivement calculable en fonction de p et q.

[2] en omettant la valeur divergente $\mathrm{Li}_1(1) = \infty$ qui disparaît naturellement des estimations.

[3] On retrouve des résultats similaires à ceux de [Ni] et [Ha] en faisant $r = a$.

où $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, a et r entiers tels $1 \leq r < a$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour simplifier l'exposé, nous noterons $N_n(z)$ cette série et nous l'écrirons sous la forme

$$N_n(z) = n!^{a-r} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-rn)_{rn}}{(k)_{n+1}^a} z^{-k}$$

où $(\alpha)_k$ est le symbole de Pochhammer

$$(\alpha)_0 = 1 \quad \text{et} \quad (\alpha)_k = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1) \quad \text{si} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Cette série est une fonction hypergéométrique généralisée :

$$\begin{aligned} N_n(z) &= z^{-rn-1} n!^{a-r} \frac{\Gamma(rn+1)\Gamma(rn+2)^a}{\Gamma((r+1)n+1)^a} \\ &\quad \times {}_{a+1}F_a \left(\begin{matrix} rn+1, \quad rn+1, \ldots, rn+1 \\ (r+1)n+2, \ldots, (r+1)n+2 \end{matrix} \middle| z^{-1} \right) . \end{aligned}$$

Elle est dite *nearly-poised* ([4]) ([Sl, p. 42, 2.1.1.10]) : la somme d'un paramètre supérieur avec le paramètre inférieur correspondant est constante, sauf pour l'un des paramètres supérieurs. Par ailleurs, ces paramètres sont tels que l'on obtient la représentation suivante de $N_n(z)$ en itérant l'identité intégrale d'Euler ([Sl, p. 108, 4.1.2]) :

Lemme 1. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$,*

$$N_n(z) = \frac{(rn)!}{n!^r} \int_{[0,1]^a} \left(\frac{\prod_{l=1}^a x_l^r (1-x_l)}{(z - x_1 x_2 \cdots x_a)^r} \right)^n \frac{\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_a}{z - x_1 x_2 \cdots x_a} . \tag{1}$$

Nous aurons besoin du critère d'indépendance linéaire suivant, dû à Nesterenko [Ne1] :

Théorème 2 (Critère de Nesterenko). *Soit N réels $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ et supposons qu'il existe N suites $(p_{l,n})_{n \geq 0}$ tels que :*

i) $\forall i = 1, \ldots, N$, $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$;

ii) $\alpha_1^{n+o(n)} \leq |\sum_{l=1}^{N} p_{l,n}\theta_l| \leq \alpha_2^{n+o(n)}$ *avec* $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 < 1$;

iii) $\forall l = 1, \ldots, N$, $|p_{l,n}| \leq \beta^{n+o(n)}$ *avec* $\beta > 1$.

Dans ces conditions,

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}\,\theta_1 + \mathbb{Q}\,\theta_2 + \cdots + \mathbb{Q}\,\theta_N) \geq \frac{\log(\beta) - \log(\alpha_1)}{\log(\beta) - \log(\alpha_1) + \log(\alpha_2)} .$$

[4]La disparition, évoquée dans la Remarque 5. ci-dessus, des valeurs parasites $\zeta(2n)$ nécessite d'utiliser une fonction hypergéométrique *well-poised* (cf.[RZ] pour quelques développements à ce sujet).

Enfin, dans toute la suite, on posera $D_\lambda = \frac{1}{\lambda!}\frac{\mathrm{d}^\lambda}{\mathrm{d}t^\lambda}$ et

$$R_n(t) = n!^{a-r}\frac{(t-rn)_{rn}}{(t)_{n+1}^a}.$$

Pour $l \in \{1,\ldots,a\}$ et $j \in \{0,\ldots,n\}$, on notera également

$$c_{l,j,n} = D_{a-l}\left(R_n(t)(t+j)^a\right)_{|t=-j} \in \mathbb{Q}\ , \tag{2}$$

$$P_{0,n}(z) = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^l}z^{j-k} \text{ et } P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n}z^j\ . \tag{3}$$

Les $P_{l,n}(z)$ sont donc des polynômes à coefficients rationnels.

3. Quelques lemmes préparatoires

Lemme 2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 1$, on a*

$$N_n(z) = P_{0,n}(z) + \sum_{l=1}^{a} P_{l,n}(z)\mathrm{Li}_l(1/z)\ . \tag{4}$$

Démonstration. En décomposant $R_n(t)$ en fractions partielles, on obtient :

$$R_n(t) = \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n}\frac{c_{l,j,n}}{(t+j)^l}.$$

D'où si $|z| > 1$

$$\begin{aligned} N_n(z) &= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}\frac{1}{(k+j)^l} \\ &= \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n}z^j\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}\frac{1}{k^l} - \sum_{k=1}^{j}\frac{1}{z^k}\frac{1}{k^l}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{a}\mathrm{Li}_l(1/z)\sum_{j=0}^{n} c_{l,j,n}z^j - \sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{k^l}z^{j-k} \end{aligned}$$

ce qui n'est rien d'autre que (4).

Lemme 3. *Pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $|z| > 1$, la suite $|N_n(z)|^{1/n}$ admet une limite, que l'on note $\varphi_{r,a}(z)$, qui vérifie*

$$0 < \varphi_{r,a}(z) \le \frac{1}{|z|^r r^{a-r}}\ . \tag{5}$$

Démonstration. La formule de Stirling implique que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(rn)!}{n!^r}\right)^{1/n} = r^r.$$

Pour z *réel*, $|z|>1$, l'existence et la valeur de

$$\lim_{n\to\infty}|N_n(z)|^{1/n} = r^r \max_{\underline{x}\in[0,1]^a}\left|\frac{\prod_{l=1}^a x_l^r(1-x_l)}{(z-x_1x_2\cdots x_a)^r}\right| \neq 0$$

résulte de la représentation intégrale (1). Insistons sur le fait que l'on ne peut pas conclure aussi facilement dans le cas z *complexe*, et qu'il faudrait alors utiliser la méthode du col.

Majorons maintenant $N_n(z)$. Si $k\in\{0,\dots,rn\}$ alors $R_n(k)=0$. Supposons $k\geq rn+1$; on a alors

$$\begin{aligned} R_n(k)|z|^{-k} &= n!^{a-r}\frac{(k-rn)_{rn}}{(k)_{n+1}^a}|z|^{-k} &\leq n^{(a-r)n}\frac{k^{rn}}{k^{a(n+1)}}|z|^{-rn} \\ &= \left(\frac{n}{k}\right)^{(a-r)n}|z|^{-rn}\frac{1}{k^a} &\leq \left(\frac{1}{|z|^r r^{a-r}}\right)^n\frac{1}{k^a}\,. \end{aligned}$$

Donc

$$|N_n(z)| \leq \sum_{k=rn+1}^{\infty} R_n(k)|z|^{-k} \leq \left(\frac{1}{|z|^r r^{a-r}}\right)^n \sum_{k=rn+1}^{\infty}\frac{1}{k^a}$$

et

$$\varphi_{r,a}(z) \leq \frac{1}{|z|^r r^{a-r}}\,.$$

Lemme 4. *Pour tout* $l\in\{0,\dots,a\}$ *et tout* $z\in\mathbb{C}$ *tel que* $|z|>1$,

$$\limsup_{n\to\infty}|P_{l,n}(z)|^{1/n} \leq r^r 2^{a+r+1}|z|\,. \tag{6}$$

Démonstration. On majore d'abord les coefficients $c_{l,j,n}$ donnés par (2). Pour cela on utilise la formule de Cauchy :

$$c_{l,j,n} = \frac{1}{2i\pi}\int_{|z+j|=1/2} R_n(z)(z+j)^{l-1}\mathrm{d}z$$

où $|z+j|=1/2$ désigne le cercle de centre $-j$ et de rayon $1/2$. Sur ce cercle, on a

$$|(z-rn)_{rn}| \leq (j+2)_{rn} \qquad \text{et} \qquad |(z)_{n+1}| \geq 2^{-3}(j-1)!(n-j-1)!\,.$$

Donc

$$\begin{aligned} |c_{l,j,n}| &\leq n!^{a-r}\frac{(rn+j)!}{j!^{a+1}(n-j)!^a}\cdot\frac{j^a(n-j)^a(rn+j+1)}{j+1}\cdot 8^a \\ &\leq \binom{rn+j}{j}\binom{n}{j}^a\frac{(rn)!}{n!^r}(rn+1)2^a\,. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$\binom{rn+j}{j} \le 2^{rn+j}\,, \quad \binom{n}{j}^a \le 2^{na}\,, \quad \frac{(rn)!}{n!^r} \le r^{rn}\,,$$

on obtient $|c_{l,j,n}| \le (r^r 2^{a+r+1})^n (rn+1)2^a$, d'où

$$\limsup_{n\to\infty} |c_{l,j,n}|^{1/n} \le r^r 2^{a+r+1}\,.$$

Si $l \in \{1,\dots,a\}$, on a $P_{l,n}(z) = \sum_{j=0}^n c_{l,j,n} z^j$ et donc

$$\limsup_{n\to\infty} |P_{l,n}(z)|^{1/n} \le r^r 2^{a+r+1}|z|\,.$$

Il nous reste à majorer $P_{0,n}(z)$, dont on a déterminé l'expression (3) :

$$P_{0,n}(z) = -\sum_{l=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} c_{l,j,n} \sum_{k=1}^{j} \frac{z^{j-l}}{k^l}\,.$$

Comme

$$\left|\sum_{k=1}^{j} \frac{z^{j-l}}{k^l}\right| \le |z|^n \sum_{k=1}^{j} \frac{1}{k} \le n|z|^n\,,$$

on a là aussi

$$\limsup_{n\to\infty} |P_{0,n}(z)|^{1/n} \le r^r 2^{a+r+1}|z|\,.$$

Lemme 5. *Pour tout* $l \in \{0,\dots,a\}$

$$d_n^{a-l} P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z] \tag{7}$$

où $d_n = \mathrm{ppcm}(1,2,\dots,n)$.

Démonstration. Fixons les entiers n et j. L'évaluation du dénominateur des coefficients $c_{l,j,n}$ repose sur la décomposition du numérateur de $R_n(t)$ en r produits de n facteurs consécutifs :

$$R_n(t)(t+j)^a = \prod_{l=1}^{r} F_l(t) \times H(t)^{a-r}$$

où pour $l \in \{1,\dots,r\}$

$$F_l(t) = \frac{(t-nl)_n}{(t)_{n+1}}(t+j)\,, \quad H(t) = \frac{n!}{(t)_{n+1}}(t+j)\,.$$

Décomposons $F_l(t)$ et $H(t)$ en fractions partielles :

$$F_l(t) = 1 + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)f_{p,l}}{t+p}\,, \quad H(t) = \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n} \frac{(j-p)h_p}{t+p}$$

où

$$f_{p,l} = \frac{(-p-nl)_n}{\prod\limits_{\substack{h=0\\h\neq p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^n((l-1)n+p+1)_n}{(-1)^p p!(n-p)!} = (-1)^{n-p}\binom{nl+p}{n}\binom{n}{p}$$

et

$$h_p = \frac{n!}{\prod\limits_{\substack{h=0\\h\neq p}}^{n}(-p+h)} = \frac{(-1)^p n!}{p!(n-p)!} = (-1)^p\binom{n}{p}$$

sont des entiers. On a alors pour tout entier $\lambda \geq 0$:

$$\begin{aligned}(D_\lambda F_l(t))_{|t=-j} &= \delta_{0,\lambda} + \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n}(-1)^\lambda \frac{(j-p)f_{p,l}}{(p-j)^{\lambda+1}} ,\\ (D_\lambda H(t))_{|t=-j} &= \sum_{\substack{p=0\\p\neq j}}^{n}(-1)^\lambda \frac{(j-p)h_p}{(p-j)^{\lambda+1}}\end{aligned}$$

avec $\delta_{0,\lambda} = 1$ si $\lambda = 0$, $\delta_{0,\lambda} = 0$ si $\lambda > 0$. On a donc montré que $d_n^\lambda (D_\lambda F_l)_{|t=-j}$ et $d_n^\lambda (D_\lambda H)_{|t=-j}$ sont des entiers pour tout $\lambda \in \mathbb{N}$. Grâce à la formule de Leibniz

$$D_{a-l}(R(t)(t+j)^a) = \sum_{\mu}(D_{\mu_1}F_1)\cdots(D_{\mu_r}F_r)(D_{\mu_{r+1}}H)\cdots(D_{\mu_a}H)$$

(où la somme est sur les multi-indices $\mu \in \mathbb{N}^a$ tels que $\mu_1 + \cdots + \mu_a = a - l$), on en déduit alors que $d_n^{a-l}c_{l,j,n} \in \mathbb{Z}$ et donc que $d_n^{a-l}P_{l,n}(z) \in \mathbb{Z}[z]$.

4. Démonstration du Théorème 1

Le Théorème 1 découle de la

Proposition 1. *Soit a un entier ≥ 2 et $\alpha = p/q$ un nombre rationnel tel que $0 < |\alpha| < 1$. Pour tout entier r tel que $1 \leq r < a$, on a la minoration*

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{a\log(r) + (a+r+1)\log(2) - (r+1)\log|\alpha|}{a + (a+r+1)\log(2) + r\log(r) + \log|q|} . \tag{8}$$

Démonstration. Le Théorème des nombres premiers implique que

$$d_n = e^{n+o(n)} . \tag{9}$$

Fixons $\alpha = p/q$ avec $0 < |\alpha| < 1$ et définissons pour tout entier $n \geq 0$

$$p_{l,n} = d_n^a p^n P_{l,n}(q/p) \text{ pour } l \in \{1, \ldots, a\} \text{ et } \ell_n = d_n^a p^n S_n(q/p) .$$

(4) montre que pour tout $n \geq 0$

$$\ell_n = p_{0,n} + \sum_{l=1}^{a} p_{l,n} \mathrm{Li}_l(\alpha) .$$

(7) montre que pour tout $l \in \{0, \ldots, a\}$ et pour tout $n \geq 0$, $p_{l,n} \in \mathbb{Z}$.
(5) et (9) montrent que

$$\log |\ell_n| = n \log(\kappa) + o(n) \quad \text{avec} \quad \kappa = e^a |p| \varphi_{r,a}(1/\alpha) .$$

Enfin, (6) et (9) impliquent que pour tout $l = 0, \ldots, a$:

$$\log |p_{l,n}| \leq n \log(\tau) + o(n) \quad \text{avec} \quad \tau = e^a |q| 2^{a+r+1} r^r .$$

En appliquant le critère de Nesterenko, on obtient donc la minoration

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{(a+r+1)\log(2) + r\log(r) - \log|\alpha| - \log(\varphi_{r,a}(1/\alpha))}{a + (a+r+1)\log(2) + r\log(r) + \log|q|} .$$

En utilisant la majoration de $\varphi_{r,a}(1/\alpha)$ donnée au Lemme 3, on en déduit la minoration (8).

Démonstration du Théorème 1. Dans les conditions de la Proposition 1, choisissons $r = r(a)$ comme l'entier $< a$ le plus proche de $a(\log(a))^{-2}$. On a alors

$$a \log(r) + (a+r+1)\log(2) - (r+1)\log|\alpha| = (1 + o(1)) a \log(a)$$

et

$$a + (a+r+1)\log(2) + r\log(r) + \log|q| = (1 + \log(2))a + o(a) .$$

D'où

$$\delta_\alpha(a) \geq \frac{(1+o(1))\log(a)}{1 + \log(2) + o(1)} ,$$

ce qui prouve le Théorème 1.

Bibliographie

[BR] K. BALL, T. RIVOAL, *Irrationalité d'une infinité de valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs.* Invent. Math. **146** (2001), 193-207.

[Ha] M. HATA, *On the linear independance of the values of polylogarithmic functions.* J. Math. pures et appl **69** (1990), 133–173.

[Ne1] YU. V. NESTERENKO, *On the linear independence of numbers.* Mosc. Univ. Math. Bull.**40** (1985), 69–74, traduction de Vest. Mosk. Univ. Ser. I (1985), 46–54.

[Ni] E. M. NIKISHIN, *On the irrationality of the values of the functions $F(x,s)$.* Mat. Sbornik **37** (1979), no. 3, 381–388.

[Ri1] T. RIVOAL, *La fonction zêta de Riemann prend une infinité de valeurs irrationnelles aux entiers impairs.* C. R. Acad. Sci. Paris **331** (2000), 267–270.

[Ri3] T. RIVOAL, *Propriétés diophantiennes des valeurs de la fonction zêta aux entiers impairs.* Thèse de doctorat, Université de Caen, 2001.

[RZ] T. RIVOAL, W. ZUDILIN, *Diophantine properties of numbers related to Catalan's constant*, à paraître à Math. Ann. (2003).

[Sl] L. J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*. Cambridge University Press, 1966.

Tanguy Rivoal
Laboratoire de Mathématiques Nicolas Oresme
CNRS UMR 6139,
Université de Caen
BP 5186
14032 Caen cedex
France
E-mail : rivoal@math.unicaen.fr