Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 561–592

Birational transformations and values of the Riemann zeta-function

par Carlo VIOLA

Résumé. Dans sa preuve du théorème d'Apéry sur l'irrationalité de $\zeta(3)$, Beukers [B] a introduit des intégrales doubles et triples de fonctions rationnelles donnant de bonnes suites d'approximations rationnelles de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$. La méthode de Beukers a été, par la suite, améliorée par Dvornicich et Viola, par Hata, et par Rhin et Viola. Nous présentons ici un survol de nos résultats récents ([RV2] et [RV3]) sur les mesures d'irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ obtenus par de nouvelles méthodes algébriques mettant en jeu les actions de transformations birationnelles et de groupes de permutations sur des intégrales doubles et triples du type de celles introduites par Beukers. Dans les deux dernières parties, nous donnons une méthode constructive pour obtenir les transformations birationnelles appropriées pour les intégrales triples à partir des transformations correspondantes pour les intégrales doubles. Cette méthode est également appliquée pour obtenir l'action de transformations birationnelles sur des intégrales quadruples du type de celles introduites par Vasilyev.

Abstract. In his proof of Apéry's theorem on the irrationality of $\zeta(3)$, Beukers [B] introduced double and triple integrals of suitable rational functions yielding good sequences of rational approximations to $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$. Beukers' method was subsequently improved by Dvornicich and Viola, by Hata, and by Rhin and Viola. We give here a survey of our recent results ([RV2] and [RV3]) on the irrationality measures of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$ based upon a new algebraic method involving birational transformations and permutation groups acting on double and triple integrals of Beukers' type. In the last two sections we give a constructive method to obtain the relevant birational transformations for triple integrals from the analogous transformations for double integrals, and we also apply such a method to get birational transformations acting on quadruple integrals of Vasilyev's type.

Carlo Viola
Dipartimento di Matematica

Manuscrit reçu le 5 juin 2002.

Università di Pisa
Via Buonarroti 2
56127 Pisa
Italy
E-mail : viola@dm.unipi.it