Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 651–663

Analogues étales de la p-tour des corps de classes

par Jilali ASSIM

Résumé. Nous construisons un analogue "tordu" de la p-tour de corps de classes d'un corps de nombres (p un nombre premier) et étudions ses liens avec la théorie d'Iwasawa. Le résultat principal donne un critère du type Golod et Shafarevich pour que la tour "tordue" soit infinie.

Abstract. We construct a "twisted" analog of the p-class field tower of a number field (p a prime number) and study its connection with Iwasawa theory. The main result gives a criterion for the "twisted" tower to be infinite in the style of Golod and Shafarevich.

1. Introduction

Soit F un corps de nombres, d'anneau des entiers O_F, et soit Cl_F le groupe des classes de F. On sait que Cl_F peut être réalisé comme le groupe de Galois d'une extension abélienne de F : $Cl_F \simeq Gal(H_F/F)$, où H_F est le corps de Hilbert de F, c'est-à-dire l'extension abélienne non ramifiée maximale de F. On sait aussi (théorème de l'idéal principal) que Cl_F capitule en entier dans Cl_{H_F}, *i.e.* que l'homomorphisme naturel induit par l'extension des idéaux de F à H_F est nul. Un problème qui en découle naturellement est l'étude de la finitude de la tour des corps de classes de F, $F = F^0 \subset F^1 \subset ... \subset F^n \subset ... \subset F^\infty := \bigcup_{n\geq 0} F^n$, où, pour tout $n \geq 1$, F^n est le corps de Hilbert de F^{n-1}. Ce problème a été résolu par Golod et Shafarevich ([GS]) qui ont montré l'existence de corps de nombres F pour lesquels la tour des corps $(F^n)_{n\geq 0}$ est infinie.

Fixons maintenant un nombre premier p et adoptons, comme Golod et Shafarevich, le point de vue p-adique. Supposons (pour simplifier) que F contient le groupe μ_{2p} des racines $2p$-ièmes de l'unité. Soit A_F la p-partie du groupe des p-classes de F. En théorie d'Iwasawa, on connait des analogues "tordus" de A_F : ce sont les modules $X_\infty(i)_\Gamma$, $i \in \mathbf{Z}$ (pour les définitions de X_∞, $X_\infty(i)$, Γ,..., voir le début du paragraphe 2).

1) Si $i = 0$, $(X_\infty)_\Gamma$ est conjecturalement fini (conjecture de Gross) et l'on a un homomorphisme canonique $(X_\infty)_\Gamma \to A_F$ dont le noyau est contrôlé

Manuscrit reçu le 24 avril 2001.

grâce à la suite exacte de Sinnott ([Si] $5-6$, voir aussi [J]). Dans la théorie du corps de classes p-adique de Jaulent (cf [J]), ce groupe est appelé "groupe des classes logarithmiques" car il peut être contrôlé par une certaine fonction logarithme p-adique (le logarithme des valeurs absolues p-adiques).

2) Si $i \neq 0$, il est bien connu (voir *e.g.* [S]) que
$X_\infty(i)_\Gamma \simeq ker(H^2_{\text{ét}}(specO_F[1/p], \mathbf{Z}_p(i+1)) \longrightarrow \bigoplus_{v|p} H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(i+1))$

a) pour $i \geq 1$, $X_\infty(i)_\Gamma$ n'est autre que le noyau sauvage étale de F ([Ko], [N2]) dont la finitude est bien connue grâce aux résultats de Borel sur la finitude des groupes de K-théorie algébrique $K_{2i}O_F$. Pour $i=1$, la conjecture de Quillen-Lichtenbaum étant vraie (cf [T]), $X_\infty(i)_\Gamma$ est isomorphe à la partie p-primaire du noyau sauvage dans K_2.

b) pour $i \leq -1$, $X_\infty(i)_\Gamma$ est conjecturalement fini (Greenberg, Schneider,..) et l'on dispose de résultats partiels, grâce au "miroir", sur la finitude de $X_\infty(i)_\Gamma$ (cf [S] $5-9$). Pour $i=-1$, la finitude de $X_\infty(-1)_\Gamma$ est équivalente à la conjecture de Leopoldt.

Par analogie avec le corps de classes, on peut alors se poser les problèmes suivants :

i) réaliser $X_\infty(i)_\Gamma$ comme groupe de Galois d'une extension abélienne de F,

ii) construire et étudier, pour (i,p) fixé, l'analogue de la p-tour des corps de classes de F en remplaçant A_F par $X_\infty(i)_\Gamma$ et ainsi de suite inductivement.

Pour $i \neq 0$, on ne sait pas réaliser $X_\infty(i)_\Gamma$ comme groupe de Galois d'une extension abélienne de F. Cependant, en étendant suffisamment le corps de base, Jaulent et Soriano ([JS]) ont construit une extension canonique de F où $(X_\infty)_\Gamma$ est le groupe de Galois d'une extension abélienne d'un étage (bien déterminé) de la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de F. On va donc construire, en imitant [JS], ce qu'on pourrait appeler la "(p,i)-tour des classes étales" de F (appellation suggérée par T.Nguyen Quang Do) : Dans cette terminologie la tour "localement cyclotomique" de [JS] est la $(p,0)$-tour des classes étales. Il est alors facile de donner, à l'aide de la théorie d'Iwasawa, des critères de finitude et d'infinitude de la "(p,i)-tour des classes élales". De tels critères ont cependant l'inconvénient de ne pas se lire directement sur le corps de base F. Le résultat principal de cet article donne un critère d'infinitude à la Golod-Shafarevich (théorème 3) de la "(p,i)-tour des classes élales". Il serait également intéressant de donner un critère de finitude. Notons que notre critère est identique à celui de [JS], mais qu'il s'obtient, peut être, plus facilement grâce essentiellement à la trivialité cohomologique des racines de l'unité (lemme de Tate). L'idée des calculs cohomologiques remonte bien sûr à [GS].

2. Construction de la tour tordue

Fixons d'abord quelques notations :
p : un nombre premier.
F : un corps de nombres contenant le groupe μ_{2p} des racines $2p$-ièmes de l'unité.
r_2 : le nombre de places complexes de F.
F^c : la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de F, de groupe de Galois $\Gamma \simeq \mathbf{Z}_p$.
$L_\infty = L_\infty(F)$: la pro-p-extension maximale de F^c, décomposant totalement toutes les places de F^c.
$L_\infty^{ab} = L_\infty^{ab}(F)$: l'extension abélienne maximale de F^c contenue dans L_∞.
$X_\infty = X_\infty(F)$: le groupe de Galois de $L_\infty^{ab}(F)$ sur F^c.

Si A est un groupe abélien et m est un entier positif, notons ${}_mA$ le noyau de la multiplication par m et A/m le conoyau. $A\{p\}$ désignera la partie p-primaire de A et A^* le dual de Pontryagin de A. Enfin si $i \in \mathbf{Z}$, et G est un groupe opérant sur A par $(g,a) \mapsto g(a)$ pour tout $g \in G$ et tout $a \in A$, et sur μ_{p^∞}, le G-module $A(i)$ (le $i$ème tordu à la Tate de A) est défini comme étant le module A muni de la nouvelle action : $g.a := \kappa(g)^i g(a)$ où κ est le caractère cyclotomique.

Fixons maintenant un entier $i \geq 1$ et notons $\mathcal{H}_{2i}^{\text{ét}}F$, le noyau sauvage étale de F : Rappelons que c'est le noyau de l'homomorphisme de localisation

$$H^2_{\text{ét}}(specO_F[1/p], \mathbf{Z}_p(1+i)) \longrightarrow \bigoplus_{v|p} H^2(F_v, \mathbf{Z}_p(1+i))$$

où pour tout $v \mid p$, F_v est le complété de F en v (le nombre premier p ne figure donc pas dans la notation). Il est bien connu que $\mathcal{H}_{2i}^{\text{ét}}F \simeq X_\infty(i)_\Gamma$ (voir *e.g.* [S]) et peut donc être vu comme l'analogue "tordu" du p-groupe de p-classes de F, et réalisé comme groupe de Galois d'une extension $\mathcal{L}_\infty = \mathcal{L}_\infty(F)$ abélienne et totalement décomposée de F^c(figure). Mais l'extension $\mathcal{L}_\infty(F)/F$ n'étant pas toujours abélienne, les arguments habituels de descente ne permettent pas de réaliser $\mathcal{H}_{2i}^{\text{ét}}F$ comme groupe de Galois d'une extension de F. De plus, même si l'extension $\mathcal{L}_\infty(F)/F$ était abélienne, le corps obtenu dépendrait du choix du relèvement d'un générateur topologique de Γ. Pour remédier à ces inconvénients, nous reprenons la construction de [JS] ($i = 0$) dans la situation qui nous intéresse ($i \geq 1$) : Notons $\tilde{F}$ le compositum des corps F_γ où F_γ est le sous-corps de $\mathcal{L}_\infty(F)$ laissé fixe par un relèvement γ d'un générateur topologique de Γ. Par maximalité, il est alors clair que :

Proposition 1. *L'extension $\tilde{F}$ est galoisienne sur F (mais pas abélienne en général).*

Figure.

$$\begin{tikzcd}
F^c \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \mathcal{L}_\infty(F) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & L^{ab}_\infty(F) \arrow[r, dash] & L_\infty(F) \\
F_{n_0} \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & \tilde{F} & & \\
F & & &
\end{tikzcd}$$

Notons également les propriétés suivantes évidentes (mais utiles) de $\tilde{F}$:

Remarque 2.1. Pour tout relèvement γ, $F_\gamma.F^c = \mathcal{L}_\infty(F)$ et $F_\gamma \cap F^c = F$, F_γ est alors un complément de F^c dans F. En particulier $(\tilde{F})^c = \mathcal{L}_\infty(F)$.

Remarque 2.2. Si $F \subset E$ alors $\mathcal{L}_\infty(F) \subset \mathcal{L}_\infty(E)$.

Le groupe $\mathcal{H}^{\text{ét}}_{2i}F$ s'injecte dans $Gal(\tilde{F}/F)$ mais ne lui est pas isomorphe en général. En fait le noyau sauvage étale est le groupe de Galois de l'extension $\tilde{F}$ sur un certain étage F_{n_0} de la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de F. Plus précisément

Proposition 2. *Si $\mathcal{H}^{ét}_{2i}F \neq 0$, alors $[\tilde{F} : F] >| \mathcal{H}^{ét}_{2i}F \mid$ et donc $\tilde{F} \cap F^c = F_{n_0}$, pour un certain entier $n_0 \geq 1$.*

Preuve : Pour la première affirmation, il suffit de remarquer que pour tout relèvement γ, on a $[F_\gamma : F] = \mathcal{H}^{\text{ét}}_{2i}F$ et $\tilde{F}$ contient strictement F_γ. Pour la deuxième affirmation, remarquant que $\tilde{F} \subset \mathcal{L}_\infty(F)$ et que $[\tilde{F} : F] > [\mathcal{L}_\infty(F) : F^c] =| \mathcal{H}^{\text{ét}}_{2i}F \mid$, on voit que $\tilde{F} \cap F^c = F_{n_0}$, $n_0 \geq 1$.

Remarque 2.3. Dans [JS], on donne une valeur plus précise de l'entier n_0 de la proposition 2 dans le cas $i = 0$: p^{n_0} est l'exposant de $(X_\infty)_\Gamma$.

Remarque 2.4. Notons p^r l'exposant de $\mathcal{H}^{\text{ét}}_{2i}F$, et, pour tout $n \geq 0$, Cl'_n le groupe des p-classes de $F(\mu_{p^n})$. Il est bien connu que $\mathcal{H}^{\text{ét}}_{2i}F \simeq (Cl'_n/p^r(i))_{G_n}$ où $G_n = Gal(F(\mu_{p^n})/F)$ et $n = n(i)$ est un entier bien déterminé et dépendant de i : C'est le plus petit entier ($\leq r$) tel que $[F(\mu_{p^r}) := F(\mu_{p^n})]$ divise i (cf *e.g* [N1] $5-6$, où la preuve donnée dans le cas $i = 1$ se généralise facilement). Le noyau sauvage étale peut donc être réalisé comme groupe de Galois d'une extension abélienne, non ramifiée et p-décomposée F' de $F(\mu_{p^n})$. On pourrait ainsi prendre pour $\tilde{F}$ l'extension en question. Mais pour des raisons de canonicité il est préférable de considérer la construction ci-dessus inspirée de [JS].

Nous procédons maintenant à la construction de la (p, i)-tour des classes étales de la façon suivante ($i \geq 1$ fixé, et ne figure pas dans la notation) :

$F_{(0)} = F$, et pour tout $m \geq 0$, $F_{(m+1)} = \widetilde{F_{(m)}}$. Notons $F_{(\infty)}$ la réunion des corps $F_{(m)}$, $m \geq 0$. Si $F_{(\infty)}$ est de degré fini, nous dirons que la "(p,i)-tour des classes élales" est finie. Sinon, la tour est infinie.

Dans les paragraphes qui suivent, nous examinerons différentes propriétés de la (p,i)-tour des classes étales. Nous donnerons en particulier un critère d'infinitude à la Golod-Shafarevich en utilisant les propriétés fonctorielles du K_3 d'un corps de nombres.

Remarque 2.5. Il est clair que la construction ci-dessus marche pour tout entier $i \in \mathbf{Z}$ si l'on suppose la finitude (conjecturale pour $i \leq 0$) du module $X_\infty(i)_\Gamma$. Tous les résultats que nous énoncerons aux paragraphes 4 et 5 pour $i \geq 1$ sont d'ailleurs valables pour i quelconque (modulo cette finitude).

3. (p,i)-tour des classes étales et théorie d'Iwasawa

Pour i fixé ($i \geq 1$), soit $F_{(\infty)}/F$ la (p,i)-tour des classes étales, et soit G le groupe de Galois sur F de l'extension $F_{(\infty)}$. Remarquant que la finitude (resp. l'infinitude) de la tour des corps $F_{(m)}$ est équivalente à celle des corps $(F_{(m)})^c$, on peut donner un premier critère de finitude (resp. d'infinitude) à l'aide de la théorie d'Iwasawa :

Proposition 3. *i) La (p,i)-tour des classes élales $F_{(\infty)}/F$ est finie si et seulement si $Gal(L_\infty(F)/F^c)$ est fini. En particulier, si la tour est finie, alors X_∞ est fini.*

ii) La tour $F_{(\infty)}/F$ est infinie si et seulement si $Gal(L_\infty(F)/F^c)$ est infini. En particulier, si l'un des invariants d'Iwasawa attachés au module X_∞ est non nul, alors la tour est infinie.

Preuve : C'est évident.

Exemples : 1) $F = \mathbf{Q}(\mu_p)$

i) Si p est régulier (*i.e* p ne divise pas le nombre de classes de F), alors $Gal(L_\infty(F)/F^c) = 0$ et la tour est finie.

ii) Si p est irrégulier (*i.e* p divise le nombre de classes de F), X_∞ est infini et la tour est infinie.

2) Si X_∞ est fini cyclique, le théorème de Burnside montre que $Gal(L_\infty(F)/F^c)$ a un seul générateur, donc $L_\infty(F) = L_\infty(F)^{ab}$ et la tour est finie.

La (p,i)-tour des classes étales $(F_{(m)})_{m\geq 0}$ est d'autant plus intéressante qu'elle est étroitement liée à la pro-p-extension non ramifiée totalement décomposée maximale de F^c :

Theorème 1. *1) Si la (p,i)-tour des classes étales de F est finie, alors $(F_{(\infty)})^c = L_\infty(F)$.*

2) Si la tour est infinie, $F_{(\infty)} = L_\infty(F)$.

Remarque 3.1. Le théorème 1 montre que toutes les "(p,i)-tours des classes étales" infinies de F coïncident et que si l'une des "(p,i)-tours des classes étales" de F est finie, il en est de même de toutes les autres. On voit alors que (lorsque F contient μ_{2p}) la finitude (ou l'infinitude) de la "(p,i)-tour des classes étales" est équivalente à celle de la tour "localement cyclotomique" ($i=0$) construite par Jaulent et Soriano dans [JS] (Si cette dernière est définie, *i.e.* si tous les étages de la tour localement cyclotomique vérifient la conjecture de Gross).

Remarque 3.2. La "(p,i)-tour des classes étales" est finie si, et seulement si, il existe un entier $m \geq 0$ tel que $\mathcal{H}_{2i}^{\text{ét}}(F_{(m)}) = 0$ ou, de façon équivalente, s'il existe un entier $m \geq 0$ pour lequel $X_\infty(F_{(m)}) = 0$.

Remarque 3.3. Notons comme d'habitude F_n le n-ième étage de la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique F^c de F. Il est clair que la finitude (resp. l'infinitude) de la tour des $F_{(m)}$ est équivalente à celle des $(F_n)_{(m)}$.

Preuve du théorème : 1) et le fait que $F_{(\infty)} \subset L_\infty(F)$ dans le cas d'une tour infinie sont évidents. Pour montrer l'inclusion $F_{(\infty)} \supset L_\infty(F)$ dans 2), notons d'abord que $F_{(\infty)}$ contient $L_\infty^{ab}(F)$:

Lemme 1. *Si la (p,i)-tour des classes étales d'un corps de nombres F contenant μ_{2p} est infinie, alors $L_\infty^{ab}(F) \subset F_{(\infty)}$.*

Preuve du lemme : La proposition 2 montre que $F_{(\infty)}$ contient la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique F^c de F. Pour chaque étage F_n de la $\mathbf{Z}_p$-extension cyclotomique de F, il existe donc un entier m tel que $F_n \subset F_{(m)}$. Nous en déduisons que $\mathcal{L}_\infty(F_n) \subset \mathcal{L}_\infty(F_{(m)}) \subset F_{(\infty)}$, soit $\bigcup_{n\geq 0}\mathcal{L}_\infty(F_n) \subset F_{(\infty)}$. Reste à déterminer $\bigcup_{n\geq 0}\mathcal{L}_\infty(F_n)$. D'une part, il est clair que $\cup_{n\geq 0}\mathcal{L}_\infty(F_n) \subset L_\infty^{ab}(F)$. D'autre part,

$$\begin{aligned} Gal(\bigcup\nolimits_{n\geq 0}\mathcal{L}_\infty(F_n)/F^c) &= \lim_{\leftarrow} Gal(\mathcal{L}_\infty(F_n)/F^c) \\ &= \lim_{\leftarrow}\mathcal{H}_{2i}^{\text{ét}}(F_n) \\ &= \lim_{\leftarrow}X_\infty(i)_{\Gamma_n} \\ &= X_\infty(i) \end{aligned}$$

où pour chaque $n \geq 0$, $\Gamma_n = Gal(F^c/F_n)$. D'où l'égalité $\bigcup_{n\geq 0}\mathcal{L}_\infty(F_n) = L_\infty^{ab}(F)$ et donc l'inclusion $L_\infty^{ab}(F) \subset F_{(\infty)}$.

Pour achever la preuve du théorème 1, notons H le groupe de Galois sur F^c de $L_\infty(F)$, et considérons la filtration (complète) de H à l'aide des Frattini successifs :

$$H = H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots,$$

où pour chaque entier $n \geq 0$, $H_{n+1} = (H_n)^p[H_n, H_n]$. Soit L_n le sous-corps de $L_\infty(F)$ fixé par H_n. Le lemme précédent montre que $L_1 \subset L_\infty^{ab}(F) \subset F_{(\infty)} = \bigcup_{n\geq 0}\mathcal{L}_\infty(F_{(m)})$. Il existe alors un entier m tel que $L_1 \subset \mathcal{L}_\infty(F_{(m)})$, et donc $L_\infty^{ab}(L_1) \subset L_\infty^{ab}(F_{(m+1)})$. Utilisant à nouveau le lemme précédent, il vient $L_2 \subset L_\infty^{ab}(L_1) \subset F_{(\infty)}$, et ainsi de suite inductivement pour tout $n \geq 0$. D'où l'inclusion $L_\infty(F) = \bigcup_{n\geq 0} L_n \subset F_{(\infty)}$, qui achève la preuve du théorème 1.

Notons, enfin, le résultat suivant sur le rang du groupe de Galois sur F de la (p,i)-tour des classes étales. Rappelons que si G est un groupe de type fini, le p-rang de G, noté dans toute la suite rg_pG, est la dimension du $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel G^{ab}/p.

Proposition 4. *Soit G le groupe de Galois sur F de la (p,i)-tour des classes étales de F. Alors $rg_p(G) = 1 + rg_p\mathcal{H}_{2i}^{ét}(F)$. Ce rang ne dépend pas de l'entier i.*

Nous avons besoin du résultat bien connu suivant (cf *e.g* [JMi]]) :

Lemme 2. *Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, $rg_p(X_\infty(i)_\Gamma) = rg_pGal(L_\infty/F) - 1$; en particulier, $rg_p(X_\infty(i)_\Gamma)$ ne dépend pas de l'entier i.*

Preuve du lemme : Fixons un entier $i \in \mathbf{Z}$. Soit d le p-rang de $Gal(L_\infty/F)$. Nous avons

$$d = 1 + rg_p((X_\infty)_\Gamma) = 1 + rg_p((X_\infty)_\Gamma/p) = 1 + rg_p(((X_\infty)_\Gamma/p)(i)).$$

Soit γ un générateur topologique de Γ. Comme F contient μ_{2p},

$$((X_\infty)_\Gamma/p)(i) \simeq (X_\infty/(p,\gamma-1))(i) \simeq (X_\infty(i))/(p,\gamma-1) \simeq X_\infty(i)_\Gamma/p.$$

D'où $d = 1 + rg_p(X_\infty(i)_\Gamma)$.

Preuve de la proposition : Si la tour est infinie, le résultat est une conséquence directe du lemme précédent et du théorème 1. Si la tour est finie, considérons le sous-corps L_1 de $L_\infty(F)$ fixé par $H^p[H,H]$, où $H = Gal(L_\infty(F)/F^c)$. Notons $\hat{F}$ le compositum des sous-corps de L_1 fixés par un relèvement d'un générateur topologique de Γ (c'est la même construction que pour le corps $\tilde{F}$ de la proposition 1 sauf qu'on remplace $\mathcal{L}_\infty(F)$ par L_1). Alors,

$$rg_pGal(\hat{F}/F) = 1 + rg_p(X_\infty(i)_\Gamma/p) = rg_pGal(L_\infty/F).$$

Comme $\hat{F} \subset F_{(\infty)} \subset L_\infty(F)$, nous avons

$$rg_pGal(\hat{F}/F) \leq rg_p(G) \leq rg_pGal(L_\infty/F).$$

D'où, $rg_p(G) = 1 + rg_p(X_\infty(i)_\Gamma)$.

4. Sur la capitulation du K_2 d'un corps de nombres

Dans ce paragraphe, nous traitons uniquement le cas du noyau sauvage, *i.e.* le cas $i = 1$. Il existe cependant un analogue étale du théorème 2 ci-dessous (Voir *e.g* [KM], theorem 1.2) et tous les calculs se généralisent au noyau sauvage étale. En outre, le p-rang du module $X_\infty(i)_\Gamma$ ne dépend pas de $i \in \mathbf{Z}$ (lemme 2 ; rappelons que F contient μ_{2p}), ce qui sera suffisant pour la preuve du théorème 3.

Pour toute extension E/F de corps de nombres, de groupe de Galois G, notons $f : K_2F \to (K_2E)^G$ l'homomorphisme de fonctorialité étudié dans [Ka]. Nous rappelons dans le théorème qui suit certains résultats de [Ka] qui nous seront utiles pour la suite. Bien que les résultats de *loc.cit.* soient plus généraux, nous nous limitons, pour nos besoins, aux extensions finies de corps de nombres :

Theorème 2. *(*[**Ka**]*) Soit E/F une extension finie de corps de nombres de groupe de Galois G. Alors*

i)

$$Ker(f) \simeq H^1(G, K_3E) \text{ et } Coker(f) \simeq H^2(G, K_3E).$$

ii) Si, de plus, l'extension E/F n'est pas ramifiée à l'infini :

$$\hat{H}^i(G, K_3E) \simeq \hat{H}^{i-2}(G, K_2E) \text{ pour tout } i \in \mathbf{Z}.$$

iii) (Borel) K_3E est un groupe abélien de rang fini,

$$Tor(K_3E) \simeq H^0(E, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \text{ et } K_3E/Tor(K_3E) \simeq \mathbf{Z}^{r_2}.$$

En plus, K_3E vérifie la descente galoisienne en tant que G-module, i.e. $(K_3E)^G = K_3F$.

Grosso modo, K_3E est l'analogue "tordu" du groupe des unités de E et $\mathcal{H}_2^{\text{ét}}E$ est celui de la partie p-primaire du groupe des p-classes de E. Si L est la pro-p-extension non ramifiée maximale de F, il est bien connu que la p-partie du groupe de classes de L est nulle : c'est une conséquence du théorème de l'idéal principal. Nous disposons d'un résultat analogue pour la partie p-primaire du noyau sauvage. Rappelons que pour une extension E de F, $\mathcal{H}_2^{\text{ét}}E := \varinjlim \mathcal{H}_2^{\text{ét}}K$, où la limite inductive porte sur toutes les sous-extensions finies K de F contenues dans E et les homomorphismes de liaison sont induits par l'application fonctorielle f.

Proposition 5. $\mathcal{H}_2^{\acute{e}t}(F_{(\infty)}) = 0$ *(et donc $\mathcal{H}_2^{\acute{e}t}(L_\infty) = 0$).*

Preuve : Chaque élément de $\mathcal{H}_2^{\text{ét}}(F_{(\infty)})$ provient, par définition, d'un certain $\mathcal{H}_2^{\text{ét}}(F_{(m)})$, $m \geq 0$. Or,

Lemme 3. *Si K est un corps de nombres, tout élément de $\mathcal{H}_2^{ét}K$ capitule dans la p-extension abélienne maximale, non ramifiée et p-décomposée d'une p-extension cyclotomique convenable de K.*

Preuve du lemme : On sait que pour $n \gg 0$, $\mathcal{H}_2^{\text{ét}}K \simeq (Cl'_n/p^n(1))_{G_n}$ où Cl'_n est le groupe des p-classes de $K(\mu_{p^n})$ et $G_n = Gal(K(\mu_{p^n})/K)$. Comme tout élément d'ordre p-primaire de Cl'_n capitule dans le p-corps des p-classes de Hilbert de $K(\mu_{p^n})$ (théorème de l'idéal principal), il en est de même de tout élément de $(Cl'_n/p^n(1))_{G_n}$.

Pour finir la preuve de la proposition 5, remarquons que si la $(p,1)$-tour des classes étales est finie (*i.e.* s'il existe $m \geq 0$ tel que $F_{(\infty)} = F_{(m)}$) le noyau sauvage étale de $F_{(\infty)}$ est nul par définition. Si la tour est infinie, la proposition est une conséquence immédiate du lemme précédent et du théorème 1.

Lorsque la tour est finie, nous avons le résultat suivant sur la cohomologie de $K_3F_{(\infty)}$ qui sera utilisé dans la preuve du théorème 3 :

Proposition 6. *Soit F un corps de nombres contenant μ_{2p} tel que la $(p,1)$-tour des classes étales $(F_{(m)})_{m\geq 0}$ soit finie, i.e $E := F_{(\infty)}$ est un corps de nombres. Alors*
1) $H^1(E/F, K_3E) = \mathcal{H}_2^{ét}F$,
2) $H^2(E/F, K_3E)$ *est cyclique.*

Preuve : Pour tout corps K, soit $\mu(K) := K \cap \mu_{p^\infty}$. Notons p^n l'ordre de $\mu(E)$ et G le groupe de Galois de E sur F. Puisque X_∞ est fini (car notre tour l'est), on peut supposer, quitte à grimper quelques étages dans la $\mathbf{Z_p}$-extension cyclotomique de F, que
i) $\Gamma_n := Gal(F(\mu_{p^\infty})/F(\mu_{p^n}))$ opère trivialement sur X_∞, et
ii) p^n tue X_∞.
Il est bien connu, en effet, que si $M := E^c = E(\mu_{p^\infty})$ (en fait $M = L_\infty$ dans ce cas), alors $H^1(M/E, K_3M)$ est contenu dans $\mathcal{H}_2^{\text{ét}}E$, donc est nul. La suite exacte

$$0 \to H^1(E/F, K_3E) \to H^1(M/F, K_3M) \to H^1(M/E, K_3M)^G = 0$$

montre alors que $H^1(E/F, K_3E) \simeq H^1(M/F, K_3M)$. Supposons alors vérifiés *i)* et *ii)*. D'une part, pour tout $i \geq 1$

$$H^i(G, K_3E) \simeq \hat{H}^{i-2}(G, K_2E). \tag{4.1}$$

(Théorème 2). D'autre part la nullité du noyau sauvage étale $\mathcal{H}_2^{\text{ét}}E$ de E donne la suite exacte de G-modules

$$0 \to K_2E\{p\} \to \bigoplus_{v\in Pl(F), w|v} \mu(E_w) \to \mu(E) \to 0. \tag{4.2}$$

Dans (4.2), le module $\bigoplus_{v\in Pl(F),w|v}\mu(E_w)$ est cohomologiquement trivial. En effet, l'extension E/F_n, $F_n := F(\mu_{p^n})$, étant p-décomposée, nous avons pour toute place v de F au-dessus de p et toute place w de E divisant v, $E_w = F_v(\mu_{p^n})$. Pour tout $i \in \mathbf{Z}$, nous avons alors

$$H^i(G, \bigoplus_{v|p,w|v} \mu(E_w)) \simeq \bigoplus_{v|p} H^i(F_v(\mu_{p^n})/F_v, \mu(E_w)). \tag{4.3}$$

Mais ce dernier groupe est nul grâce au lemme de Tate sur la trivialité cohomologique des racines de l'unité pour l'action de $Gal(F_v(\mu_{p^n})/F_v)$ (cf [S]). Quant à la trivialité cohomologique du G-module $\bigoplus_{w|v}\mu(E_w)$, pour les places v ne divisant pas p, elle résulte simplement du fait que l'extension E/F n'est pas ramifiée en ces places. Nous déduisons alors de (4.1) et (4.2) que :

$$H^i(G, K_3E) \simeq \hat{H}^{i-3}(G, \mu(E)).$$

Ainsi, pour $i = 1$,

$$H^1(G, K_3E) \simeq \hat{H}^{-2}(G, \mu(E)) \simeq H_1(G, \mu(E)) \simeq H^1(G, \mathbf{Z}/p^n(-1))^*.$$

(dualité pour la cohomologie des groupes finis).
Pour finir la preuve, la suite spectrale de Hoschchild-Serre et la trivialité cohomologique de $\mathbf{Z}/p^n(-1)$ pour l'action de $G_n := Gal(F(\mu_{p^n})/F)$ donnent l'isomorphisme

$$H^1(G, \mathbf{Z}/p^n(-1)) \simeq H^1(H, \mathbf{Z}/p^n(-1))^{G_n}$$

où $H = Gal(E/F_n)$. Comme

$$H^1(H, \mathbf{Z}/p^n(-1))^{G_n} = Hom(X_\infty, \mathbf{Z}/p^n(-1))^{G_n} = Hom(X_\infty(1), \mathbf{Z}/p^n)^{G_n}$$

et comme $\Gamma_n := Gal(F^c/F_n)$ opère trivialement sur $X_\infty(1)$ (hypothèse i)), nous obtenons

$$H^1(G, \mathbf{Z}/p^n(-1)) \simeq Hom(X_\infty(1)_{\Gamma_n}, \mathbf{Z}/p^n)^{G_n} \simeq Hom(X_\infty(1)_\Gamma, \mathbf{Z}/p^n),$$

soit

$$H_1(G, \mu(E)) \simeq X_\infty(1)_\Gamma \simeq \mathcal{H}_2^{\text{ét}} F,$$

(hypothèse ii)) ; d'où 1).

Pour 2), $H^2(G, K_3E) \simeq \hat{H}^0(G, K_2E) \simeq \hat{H}^{-1}(G, \mu(E))$, lequel est un quotient de $\mu(E)$ donc cyclique.

5. Critère d'infinitude à la Golod-Shafarevich

Le p-rang d'un groupe abélien A de type fini, noté dans toute la suite rg_pA, est la dimension du $\mathbf{F_p}$-espace vectoriel A/p.

Theorème 3. *Soit F un corps de nombres contenant μ_{2p} tel que*

$$rg_p\mathcal{H}_{2i}^{ét}(F) \geq 1 + 2\sqrt{r_2+2}.$$

Alors la (p,i)-tour des classes étales $(F_{(m)})_{m\geq 0}$ de F est infinie.

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du théorème 3, $Gal(L_\infty(F)/F^c)$ est infini.*

Remarque 5.1. Le lemme 2 montre que le p-rang du module $X_\infty(i)_\Gamma$ ne dépend pas de l'entier $i \in \mathbf{Z}$. Le théorème 3 peut alors être énoncé (modulo la finitude de $rg_p(X_\infty(i)_\Gamma)$ pour toutes les (p,i)-tours de classes étales $(i \in \mathbf{Z})$. On a aussi vu que toutes les (p,i)-tours infinies coïncident. Notre critère est donc identique à celui de Jaulent et Soriano ([JS] th 12) sur l'infinitude de la tour "localement cyclotomique" $(i=0)$. Nous verrons dans la preuve que le "twist" se simplifie par rapport au cas $i=0$ grâce essentiellement aux deux constatations suivantes (déjà utilisées dans la preuve de la proposition 6) :

i) L'action de $Gal(L_\infty/F^c)$ sur les racines de l'unité est triviale, d'où la possibilité de faire sortir le "twist".

ii) La descente (ou la co-descente) se fait bien grâce au lemme de Tate sur la trivialité cohomologique de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(i)$, $i \neq 0$, pour l'action de $Gal(F^c/F)$.

Preuve du théorème : Supposons que sous les hypothèses du théorème, la tour $(F_{(m)})_{m\geq 0}$ est finie. Notons G le groupe de Galois de $E := F_{(\infty)}$ sur F, $d := rg_pH^1(G,\mathbf{Z}/p)$ le nombre minimal de générateurs de G et $r := rg_pH^2(G,\mathbf{Z}/p)$ le nombre de relations. Alors (cf *e.g* [R] theorem 10) :

$$d^2/4 < r$$

(inégalité de Golod-Shafarevich). Soit p^n l'ordre du G-module $\mu(E) = \mu_{p^n}(E)$. Puisque notre tour est finie, on peut supposer, comme dans la preuve de la proposition 6, que $\Gamma_n := Gal(F(\mu_{p^n})/F)$ opère trivialement sur X_∞, et que p^n tue X_∞. Les suites exactes de G-modules

$$0 \to \mu_{p^{n-1}}(E) \to \mu_{p^n}(E) \overset{p^{n-1}}{\to} \mu_p(E) \to 0$$

et

$$0 \to \mu_p(E) \to \mu_{p^n}(E) \overset{p}{\to} \mu_{p^{n-1}}(E) \to 0$$

donnent par cohomologie les suites exactes respectives

$$\hat{H}^{-3}(G,\mu_{p^n}(E)) \to \hat{H}^{-3}(G,\mu_p(E)) \to \hat{H}^{-2}(G,\mu_{p^{n-1}}(E)) \tag{5.4}$$

et

$$\hat{H}^{-2}(G,\mu_{p^n}(E)) \to \hat{H}^{-2}(G,\mu_{p^{n-1}}(E)) \to \hat{H}^{-1}(G,\mu_p(E)). \tag{5.5}$$

Nous en déduisons respectivement :

$$r = rg_p\hat{H}^{-3}(G,\mu_p(E)) \leq rg_p\hat{H}^{-3}(G,\mu_{p^n}(E)) + rg_p\hat{H}^{-2}(G,\mu_{p^{n-1}}(E))$$

et

$$rg_p\hat{H}^{-2}(G,\mu_{p^{n-1}}(E)) \leq rg_p\hat{H}^{-2}(G,\mu_{p^n}(E)) + rg_p\hat{H}^{-1}(G,\mu_p(E)).$$

D'où

$$r \leq rg_p\hat{H}^{-3}(G,\mu_{p^n}(E)) + rg_p\hat{H}^{-2}(G,\mu_{p^n}(E)) + rg_p\hat{H}^{-1}(G,\mu_p(E)).$$

La clef de la preuve va être le calcul de chacun des p-rangs dans le membre de droite de cette dernière inégalité. Nous avons
(i) $rg_p\hat{H}^{-1}(G,\mu_p(E)) = 1$.
(ii) $\hat{H}^{-2}(G,\mu_{p^n}(E)) = \mathcal{H}_2^{\text{ét}}F$ (preuve de la proposition 6).
En plus, $d = 1+rg_p\mathcal{H}_2^{\text{ét}}F$ (proposition 4). D'où $rg_p\hat{H}^{-2}(G,\mu_{p^n}(E)) = d-1$.
(iii) Pour $rg_p\hat{H}^{-3}(G,\mu_{p^n}(E))$, nous utilisons encore une fois la suite exacte (4.2), la trivialité cohomologique de $\bigoplus_{v\in Pl(F),w|v}\mu(E_w)$ et le théorème 2 *ii)* :

$$\hat{H}^{-3}(G,\mu_{p^n}(E)) \simeq \hat{H}^{-2}(G,K_2E) \simeq \hat{H}^{0}(G,K_3E).$$

Utilisant alors le théorème 2 *iii)*, il vient :

$$rg_p\hat{H}^{-3}(G,\mu_{p^n}(E)) \leq 1 + r_2.$$

Regroupant tout ce qui précède, nous avons $d^2/4 < r \leq (1+r_2)+(d-1)+1$, soit $d^2/4 - d - (1+r_2) < 0$ ou encore $d < 2 + 2\sqrt{r_2+2}$. Nous obtenons finalement, compte tenu de la proposition 4, l'inégalité $rg_p\mathcal{H}_2^{\text{ét}}(F) < 1 + 2\sqrt{r_2+2}$, qui contredit les hypothèses du théorème.

Exemple : Prenons $p = 3$, $F = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ et considérons une extension cyclique E de F, de degré 3 dans laquelle 9 idéaux premiers (au moins) sont ramifiés. La formule des genres pour le noyau sauvage étale (cf [KM] theorem 2.11) montre que

$$rg_p\mathcal{H}_2^{\text{ét}}E \geq (9-1) - (r_2(F)+1)$$

soit $rg_p\mathcal{H}_2^{\text{ét}}E \geq 6$. Le théorème ci-dessus montre alors que la tour des corps $E_{(m)}$ est infinie ($6 \geq 1 + 2\sqrt{r_2(E)+2} = 1 + 2\sqrt{5}$).

Remerciements. Je tiens à remercier T.Nguyen Quang Do qui a attiré mon attention sur l'article [JS] et dont les nombreux conseils m'ont permis de mener à bien ce travail.

Bibliographie

[GS] E. Golod, I. Shafarevich, *On class field towers.* Amer. Math. Soc. Transl. **48** (1965), 91–102.

[J] J.-F. Jaulent, *Classes logarithmiques des corps de nombres.* J. Théorie des Nombres Bordeaux **6** (1985), 303–327.

[JM] J.-F. Jaulent, C. Maire, *A propos de la tour localement cyclotomique.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **70** (2000), 239–250.

[JMI] J.-F. Jaulent, A. Michel, *On certain étale K-groups and their logarithmic interpretation.* prépublication, (2001).

[JS] J.-F. Jaulent, F. Soriano, *Sur les tours localement cyclotomiques.* Archiv. Math. **73** (1999), 132–140.

[Ka] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 d'un corps de nombres.* K-theory **7** (1993), 55–100.

[KM] M. Kolster, A. Movahhedi, *Galois co-descent for étale wild kernels and capitulation.* Ann. Inst. Fourier **50** (2000), 35–65.

[Ko] M. Kolster, *Remarks on étale K-theory and Leopoldt's conjecture.* Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, Progress in Math. **116** (1993), 37–62.

[N1] T. Nguyen Quang Do, *Sur la $\mathbf{Z}_p$-torsion de certains modules galoisiens.* Ann. Inst. Fourier **36** (1986), 27–46.

[N2] T. Nguyen Quang Do, *Analogues supérieurs du noyau sauvage.* Sém. Théorie des Nombres Bordeaux **4** (1992) , 263–271.

[R] P. Roquette, *On class field towers.* Cassels-Fröhlich (ed), Acad. Press. London, 1967, 231–249.

[S] P. Schneider, *Über gewisse Galoiskohomologiegruppen.* Math. Zeit. **168** (1979), 181–205.

[Si] W. Sinnott, *Appendix to "Regulators and Iwasawa modules"* by L.J. Federer and B.H. Gross. Invent. Math. **62** (1981), 443–457.

[T] J. Tate, *Relations between K_2 and Galois cohomology.* Invent. Math. **36** (1976), 257–274.

Jilali Assim
Département de Mathématiques et Informatique
Université Moulay Ismail
B.P 4010 Bni M'hamed
Meknès, Maroc
E-mail : assim@fsmek.ac.ma