Journal de Théorie des Nombres
de Bordeaux **15** (2003), 745–766

Répartition en moyenne de certaines fonctions arithmétiques sur l'ensemble des entiers sans grand facteur premier

par Mongi NAIMI

Résumé. Soient $\lambda > 1$, $0 < \eta < \frac{1}{2}$ et $g(n)$ une fonction multiplicative vérifiant $\begin{cases} g(p) = & 1/\lambda \\ g(n) \gg & n^{-\eta} \end{cases}$. Dans ce travail, on établit une formule asymptotique de la somme $\sum_{ng(n)\le x;\ P(n)\le y} 1$, valable dans le domaine $\exp(\log\log cx)^{\frac{5}{3}+\varepsilon} \le y/\lambda \le cx$, et on donne une condition nécessaire et suffisante pour que cette somme soit équivalente à $\sum_{n\le x;\ P(n)\le y} 1/g(n)$.

Abstract. Let $\lambda > 1$, $0 < \eta < \frac{1}{2}$ and $g(n)$ be a multiplicative function such that $\begin{cases} g(p) = & 1/\lambda \\ g(n) \gg & n^{-\eta} \end{cases}$. In the present work, we establish an asymptotic formula for the sum $\sum_{ng(n)\le x;\ P(n)\le y} 1$, valid in the domain $\exp(\log\log cx)^{\frac{5}{3}+\varepsilon} \le y/\lambda \le cx$, and we give a necessary and sufficient condition for this sum to be equivalent to $\sum_{n\le x;\ P(n)\le y} 1/g(n)$.

1. Introduction

Désignons par $P(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier générique n, avec la convention $P(1) = 1$, et soit f une fonction arithmétique, multiplicative et positive . Pour $(x, y) \in]0, \infty[\times[2, \infty[$, on considère la fonction

$$\mathcal{S}_f(x, y) := \sum_{\substack{f(n)\le x\\ P(n)\le y}} 1.$$

Le cas $f(n) = j(n) := n$, noté dans la littérature $\Psi(x, y)$, est typique. Il a fait l'objet de nombreux travaux ces dernières décennies. Pour une synthèse, on pourra consulter l'article de A.Hildebrand et G.Tenenbaum [5] et le chapitre III.5 de [10].

Dans un cadre plus général, A.Smati et J.Wu [9] et l'auteur [6] ont étudié, par deux méthodes différentes, $\mathcal{S}_f(x, y)$ pour une classe $\mathcal{E}$ de fonctions f

Manuscrit reçu le 21 janvier 2002.

vérifiant essentiellement

$$f(p) = p + b \qquad (b > -1),$$

où, ici et dans toute la suite, la lettre p est exclusivement réservée pour indiquer un nombre premier générique. La classe $\mathcal{E}$ contient, entre autres, l'identité j, la fonction φ d'Euler et la fonction σ somme des diviseurs d'un entier. Ils montrent que, pour toute fonction f de la classe $\mathcal{E}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel $x_0 > 0$ tel que l'on ait

$$\mathcal{S}_f(x,y) = A_f x\rho(u)\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{u\log(u+1)}{\log x}\Big)\Big\} \tag{1.1}$$

uniformément pour $x \geq x_0$ et y vérifiant

$$\exp(\log\log x)^{\frac{5}{3}+\varepsilon} \leq y \leq x, \tag{$\mathcal{H}_\varepsilon$}$$

où $u := \dfrac{\log x}{\log y}$, $A_f := \prod\limits_{p\geq 2}(1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{f(p^k)})(1-p^{-1})$ et ρ désigne la fonction de Dickman, la solution continue sur $]0,\infty[$ de l'équation différentielle aux différences

$$\begin{array}{lcl} u\rho'(u) + \rho(u-1) & = & 0 \quad (u \geq 1),\\ \rho(u) & = & 1 \quad (0 < u \leq 1),\\ \rho(u) & = & 0 \quad (u \leq 0). \end{array}$$

La formule (1.1) contient, dans le cas $f = j$, un résultat sur $\Psi(x,y)$ dû à A. Hildebrand [3].

Soient $\lambda > 1$ et $0 < \eta < \frac{1}{2}$ deux nombres réels donnés. Notons par $\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$ la classe de fonctions f multiplicatives, strictement positives et vérifiant, pour tout entier n,

$$f(n) := ng(n), \text{ avec } \left\{\begin{array}{l} g(p) = 1/\lambda \\ g(n) \gg n^{-\eta}. \end{array}\right. \tag{$*$}$$

$$\log f(n) \ll \log n. \tag{$**$}$$

Dans [1], R. Balasubramanian et K. Ramachandra se sont intéressés à la classe $\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$; ils ont étudié la quantité $\mathcal{S}_f(x) := \sum_{f(n)\leq x} 1$ lorsque f est dans $\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$. En posant

$$F := \prod_{p\geq 2}\left[\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{p^k g(p^k)}\Big)\Big(1 - p^{-1}\Big)^{\lambda}\right], \tag{1.2}$$

ils obtiennent, en particulier,

$$\mathcal{S}_f(x) = \frac{F}{\Gamma(\lambda)}.x(\log x)^{\lambda-1}\left\{1 + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right\} \qquad (x \geq 2), \tag{1.3}$$

où, ici et dans toutes les formules proposées dans cet article, les constantes implicites dépendent de la fonction f choisie. Ils remarquent, par la suite, l'équivalence

$$(1.4) \qquad \sum_{f(n)\le x} 1 \quad \sim \quad \sum_{n\le x} \frac{1}{g(n)} \qquad (x\to\infty).$$

L'objet du présent travail est la généralisation, aux entiers sans grand facteur premier, de la formule (1.3) et de l'équivalence (1.4). Nous établissons, dans un premier temps, une formule du type (1.1) pour les fonctions de la classe $\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$. Nous déduisons, par la suite, une généralisation de l'équivalence (1.4), dont on précisera le domaine de validité.

Avant d'énoncer nos résultats, introduisons quelques notations. Pour toute fonction $f\in\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$, on pose $c := 1/\inf\{f(n),\quad n\ge 1\}$, on remarquera que $c\ge 1$. Pour $y>\lambda$, on note $v := \dfrac{\log cx}{\log(y/\lambda)}$ et on désigne par ρ_λ la solution continue sur $]0,\infty[$ de l'équation différentielle aux différences

$$(1.5) \qquad \begin{cases} u\rho'_\lambda(u) &= (\lambda-1)\rho_\lambda(u)-\lambda\rho_\lambda(u-1) \quad (u\ge 1),\\ \rho_\lambda(u) &= \dfrac{u^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)} \qquad\qquad\qquad\qquad (0<u\le 1).\end{cases}$$

La fonction ρ_λ, qui généralise la fonction ρ de Dickman, a fait l'objet d'études approfondies (cf. par exemple [2], [4], [7] et [8]). Son comportement asymptotique est rappelé au lemme 2 ci-dessous.

Théorème. *Soient f une fonction de la classe $\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$ et F la constante définie par* (1.2). *Pour tout $\varepsilon>0$, il existe un réel $x_0>0$ tel que l'on ait*

$$(1.6) \qquad \mathcal{S}_f(x,y) = F.x(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-1}\rho_\lambda(v)\Big\{1+O_\varepsilon\Big(\frac{\log\log x+\log(v+1)}{\log(y/\lambda)}\Big)\Big\}$$

uniformément dans le domaine $\mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda,c}(x_0)$, défini par

$$\Big(\mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda,c}(x_0)\Big) \qquad x\ge x_0 \qquad \textit{et} \qquad \exp(\log\log cx)^{\frac53+\varepsilon}\le y/\lambda\le cx.$$

Par ailleurs, pour $x>0$ et $y\ge 2$, on pose $\mathcal{G}(x,y) := \displaystyle\sum_{\substack{n\le x\\ P(n)\le y}} \frac{1}{g(n)}$, où g est la fonction multiplicative définie par $(*)$. Nous déduisons du théorème 3 de H. Smida [8] (ou encore du corollaire 1.3 du récent travail de G. Tenenbaum et J. Wu [11]) que, pour tout $\varepsilon>0$,

$$(1.7) \qquad \mathcal{G}(x,y) = F.x(\log y)^{\lambda-1}\rho_\lambda(u)\left(1+O_\varepsilon\Big(\frac{1+\log u}{\log y}\Big)\right)$$

uniformément pour $x\ge 3$ et $(x,y)\in\mathcal{H}_\varepsilon$. En comparant cette formule et (1.6), on obtient le résultat suivant.

Corollaire. *Soient ε positif et f une fonction de la classe $\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$. Dans le domaine $\mathcal{H}_\varepsilon$ et quand x tend vers l'infini, l'équivalence $\mathcal{S}_f(x,y) \sim \mathcal{G}(x,y)$ est réalisée si, et seulement si, on a*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log x \log\log x}{(\log y)^2} = 0. \tag{1.8}$$

La preuve de notre théorème est élémentaire. Elle est fondée sur une récurrence utilisant une identité de type Buchstab et une inégalité de convolution fonctionnelle (cf. lemmes 7 et 8, ci-dessous).

L'identité de type Buchstab permettra l'étude de $\mathcal{S}_f(x,y)$, de proche en proche, pour les "petites" valeurs de v. L'inégalité fonctionnelle servira à établir, par une technique analogue à celle de A. Hildebrand [3] (voir aussi [6]), des relations de récurrence qui seront utilisées pour l'étude des "grandes" valeurs de v.

2. Lemmes.

Commonçons par introduire quelques notations supplémentaires. Pour $t > 0$ et $f \in \mathcal{E}_{\lambda,\eta}$, on pose $\theta_\lambda(t) := \sum_{f(p)\le t} \frac{1}{f(p)}$ et $m_\lambda(t) := \sum_{f(p)\le t} \log p$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $\sigma_j(t) := \lambda I^{(j)}(\xi(\frac{t}{\lambda}))$, où $I(t) := \int_0^t \frac{e^s-1}{s} ds$ et $\xi(t)$ est l'unique racine réelle, non nulle de l'équation $e^{\xi(t)} = 1 + t\xi(t)$, avec la convention $\xi(1) = 0$. On réserve la lettre γ pour indiquer la constante d'Euler et y_0 pour désigner une constante assez grande.

Les deux premiers lemmes regroupent certaines proprietés des fonctions ξ et ρ_λ. Ces proprietés sont établies dans [7] et [8].

Lemme 1. ([7]) *La fonction $\xi(t)$ vérifie*

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \xi(t) = \log(t\log t) + O(\frac{\log\log 2t}{\log 2t}) & & & & (t \ge 2), \\ \frac{5}{4}(t-1) & \le & \xi(t) & \le \; 2(t-1) & (1 \le t \le 2), \\ -\frac{1}{t} & \le & \xi(t) & \le \; 1-\frac{1}{t} & (0 < t \le 1). \end{array} \right. \tag{2.1}$$

Lemme 2. ([7], [8]) *Soient $\lambda > 1$ et ρ_λ la solution de l'équation différentielle aux différences* (1.5).

i) Il existe un réel $a_\lambda \in]\lambda-1,\lambda]$ tel que la fonction ρ_λ est croissante sur $]0,a_\lambda]$ et décroissante sur $[a_\lambda,\infty[$.

ii) Pour tout réel $u > 1$, on a

$$u\rho_\lambda(u) = \lambda \int_{u-1}^u \rho_\lambda(t)dt. \tag{2.2}$$

iii) Pour tout $u > 0$ et tout $0 < k \leq u$, on a

$$\rho_\lambda(u) = u^{\lambda-1}\left(\frac{\rho_\lambda(k)}{k^{\lambda-1}} - \lambda\int_k^u \frac{\rho_\lambda(t-1)}{t^\lambda}dt\right). \tag{2.3}$$

iv) Pour $u > 1$, on a

$$\left|\frac{\rho'_\lambda(u)}{\rho_\lambda(u)}\right| \ll |\xi(u/\lambda)| + 1. \tag{2.4}$$

v) Pour tout $u > 0$ et tout $t \in]0, u]$, on a

$$\frac{\rho_\lambda(u-t)}{\rho_\lambda(u)} \ll \exp(t\xi(u/\lambda)). \tag{2.5}$$

vi) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $t > 0$, on a uniformément

$$\rho_\lambda(t) = \frac{\exp\{\lambda\gamma + \sigma_0(t) - t\xi(t/\lambda)\}}{\sqrt{2\pi\sigma_2(t)}}\Big(1 + O_\varepsilon(\frac{1}{t+\lambda})\Big). \tag{2.6}$$

Le lemme suivant se déduit de l'estimation classique de la somme $\sum_{p\leq y}\frac{1}{p}$ (cf. par exemple, le théorème I.1.9 de [10]) et du Théorème des Nombres Premiers sous la forme $\sum_{p\leq t}\log p = t + O_\varepsilon(t\exp -(\log t)^{\frac{3}{5}-\varepsilon})$.

Lemme 3. *Soit $f \in \mathcal{E}_{\lambda,\eta}$.*
i) Il existe une constante γ_0 tel que l'on ait

$$\theta_\lambda(t) = \lambda\log\log t + \lambda\gamma_0 + O\left(\frac{1}{\log t}\right) \qquad (t \geq 2). \tag{2.7}$$

ii) Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $t \geq 1$, on a

$$m_\lambda(t) = \lambda t\left\{1 + O_\varepsilon\left(\exp -(\log t)^{\frac{3}{5}-\varepsilon}\right)\right\}. \tag{2.8}$$

Lemme 4. *Soient $f \in \mathcal{E}_{\lambda,\eta}$, $\beta > -1$, $\beta_0 = inf(1, 1+\beta)$ et $\delta = 1 - \dfrac{1}{\log(y/\lambda)}$. Pour tout $y \geq y_0$ et x vérifiant $\sqrt{cx} < y/\lambda \leq x^\delta$, on a*

(2.9)

$$\sum_{\frac{y}{\lambda}<f(p)\leq x^\delta}\frac{(\log(x/f(p)))^\beta}{f(p)} = (\log\frac{y}{\lambda})^\beta \times\left[\lambda\int_1^v \frac{(v-h)^\beta}{h}dh + O_\beta\left(\frac{1}{(\log(y/\lambda))^{\beta_0}}\right)\right].$$

Preuve. Notons A le membre de gauche de (2.9). Le passage à l'intégrale de Stieltjes donne $A = \int_{y/\lambda}^{x^\delta}(\log\frac{x}{t})^\beta d\theta_\lambda(t)$. Compte tenu de (2.7), une double intégration par parties fournit

$$A=\lambda\int_{y/\lambda}^{x^\delta}\frac{(\log(x/t))^\beta}{t\log t}dt+R_1+R_2+R_3,$$

avec $\quad R_1\ll\dfrac{((1-\delta)\log x)^\beta}{\delta\log x},\qquad R_2\ll\dfrac{(\log x-\log(y/\lambda))^\beta}{\log(y/\lambda)}\quad$ et $R_3\ll\displaystyle\int_{y/\lambda}^{x^\delta}\frac{1}{\log t}\Big|\frac{d}{dt}(\log(x/t))^\beta\Big|dt.$

Le terme principal s'écrit

$$\lambda\int_{y/\lambda}^{x^\delta}\frac{(\log(x/t))^\beta}{t\log t}dt=\lambda(\log(y/\lambda))^\beta\Big(1+O(\frac{1}{\log(y/\lambda)})\Big)\times\int_{y/\lambda}^{x^\delta}\frac{(v-\frac{\log ct}{\log(y/\lambda)})^\beta}{t\log ct}dt.$$

En effectuant le changement de variable $h=\dfrac{\log ct}{\log(y/\lambda)}$, il est égal à

$$\lambda(\log(y/\lambda))^\beta\Big(1+O(\frac{1}{\log(y/\lambda)})\Big)\int_{1+\frac{\log c}{\log(y/\lambda)}}^{v-\frac{\log x}{(\log(y/\lambda))^2}}\frac{(v-h)^\beta}{h}dh.$$

Comme l'intégrale pécédente est bornée pour $v\in]1,2]$ et $\beta>-1$, on conclut que

$$\lambda\int_{y/\lambda}^{x^\delta}\frac{(\log(x/t))^\beta}{t\log t}dt=\lambda(\log(y/\lambda))^\beta\times\Big[\int_1^v\frac{(v-h)^\beta}{h}dh-R_0+O_\beta(\frac{1}{\log(y/\lambda)})\Big]$$

avec $R_0:=\displaystyle\int_1^{1+\frac{\log c}{\log(y/\lambda)}}\frac{(v-h)^\beta}{h}dh+\int_{v-\frac{\log x}{(\log(y/\lambda))^2}}^{v}\frac{(v-h)^\beta}{h}dh.$

Nous allons traiter R_0 comme un terme d'erreur. D'une part, en remarquant que $\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{\log c}{\log(y/\lambda)}\le v<2$, on constate que, pour $h\in[1,1+\frac{\log c}{\log(y/\lambda)}]$ et $y\ge y_0$, on a

$$(v-h)^\beta\ll_\beta\begin{cases}1 & \text{si}\quad \beta\ge 0\\ (\log(y/\lambda))^{-\beta} & \text{si}\quad -1<\beta<0\end{cases}$$

et on en déduit que la première intégrale dans R_0 est $\ll_\beta 1/(\log(y/\lambda)^{\beta_0}$. D'autre part, en majorant la deuxième par $\displaystyle\int_{\delta v}^{v}\frac{dh}{h}$ si $\beta\ge 0$ et par

$\int_{\delta v}^{v}(v-h)^\beta dh$ si $-1<\beta<0$, on voit qu'elle est $\ll_\beta 1/(\log(y/\lambda)^{\beta_0}$ lorsque $v\in]1,2[$. Par conséquence, le terme principal de l'expression de A s' écrit

$$\lambda(\log(y/\lambda))^\beta\left[\int_1^v \frac{(v-h)^\beta}{h}dh+O_\beta(\frac{1}{(\log(y/\lambda))^{\beta_0}})\right].$$

Montrons maintenant que les termes R_1, R_2 et R_3 sont de l'ordre requis. Pour cela, on majore R_1 par $(v-\dfrac{\log c}{\log(y/\lambda)})^\beta\dfrac{1}{\log y/\lambda}$; ce qui est admissible, car $(v-\dfrac{\log c}{\log(y/\lambda)})^\beta\ll_\beta 1$ pour $v\in]1,2[$ et $y\geq y_0$.

Dans les mêmes conditions, on a aussi $R_2\ll_\beta(\log(y/\lambda))^{\beta-\beta_0}$. En effet, si $\beta\geq 0$, on a $R_2\ll v^\beta(\log(y/\lambda))^{\beta-1}\ll_\beta(\log(y/\lambda)^{\beta-1}$. Dans le cas $\beta<0$, on majore $\log(y/\lambda)$ par $\delta\log x$ et on obtient

$$R_2\ll\frac{((1-\delta)\log x)^\beta}{\log(y/\lambda)}\ll\left(v-\frac{\log c}{\log(y/\lambda)}\right)^\beta\frac{1}{\log(y/\lambda)}\ll_\beta\frac{1}{\log(y/\lambda)}$$

pour $v\in]1,2]$ et $y\geq y_0$.

Quant à R_3, en remarquant que la dérivée $\dfrac{d}{dt}(\log(x/t))^\beta$ a un signe constant sur l'intervalle $[y/\lambda,x^\delta]$, on voit que

$$\int_{y/\lambda}^{x^\delta}\frac{1}{\log t}\left|\frac{d}{dt}(\log(x/t))^\beta\right|dt\ll\frac{1}{\log y/\lambda}\left|\int_{y/\lambda}^{x^\delta}\frac{d}{dt}(\log(x/t))^\beta dt\right|\ll R_1+R_2,$$

donc $R_3\ll_\beta(\log(y/\lambda))^{\beta-\beta_0}$. Ainsi s'achève la preuve de ce lemme. □

Lemme 5. *Soient f une fonction de la classe $\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$ et a_λ le réel défini au lemme 2. Pour $2\leq v\leq a_\lambda+2$, $k\in]v-1,v]$, $y\geq y_0$ et $z/\lambda=(y/\lambda)^{v/k}$, on a*

$$\sum_{\frac{y}{\lambda}\leq f(p)\leq\frac{z}{\lambda}}\frac{(\log f(p))^{\lambda-1}\rho_\lambda(\frac{\log(cx)}{\log f(p)}-1)}{f(p)}=(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-1}\tag{2.10}$$

$$\times\Big[\lambda v^{\lambda-1}\int_k^v\rho_\lambda(u-1)\frac{du}{u^\lambda}+O(\frac{\rho_\lambda(v)}{\log(y/\lambda)})\Big].$$

Preuve. La somme dans l'expression (2.10) est égale à l'intégrale de Stieltjes $\int_{\frac{y}{\lambda}}^{\frac{z}{\lambda}}\rho_\lambda(\dfrac{\log cx}{\log t}-1)(\log t)^{\lambda-1}d\theta_\lambda(t)$. En effectuant une double intégration par parties et en tenant compte de (2.7), elle est égale à

$$\lambda\int_{\frac{y}{\lambda}}^{\frac{z}{\lambda}}\rho_\lambda(\frac{\log cx}{\log t}-1)(\log t)^{\lambda-1}\frac{dt}{t\log t}+R_4+R_5+R_6,\tag{2.11}$$

avec $\quad R_4 \ll \rho_\lambda(k-1)(\log(z/\lambda))^{\lambda-2}, \qquad R_5 \ll \rho_\lambda(v-1)(\log(y/\lambda))^{\lambda-2}$

et $R_6 \ll \dfrac{1}{\log(y/\lambda)} \displaystyle\int_{\frac{y}{\lambda}}^{\frac{z}{\lambda}} \left| \frac{d}{dt}\left[\rho_\lambda(\frac{\log cx}{\log t}-1)(\log t)^{\lambda-1}\right]\right| dt.$

Le changement de variable $u = \dfrac{\log cx}{\log t}$ dans l'intégrale de (2.11) fournit le terme principal cherché.

Pour estimer les termes de reste, on distinguera deux cas suivant que $v \le a_\lambda + 1$ ou $a_\lambda + 1 < v \le a_\lambda + 2$. Avant de se lancer dans les calculs, il est utile de remarquer que, dans les hypothèses du lemme, on a les deux relations suivantes

$$\log\left(\frac{y}{\lambda}\right) \le \log\left(\frac{z}{\lambda}\right) \le 2\log\left(\frac{y}{\lambda}\right) \quad \text{et} \quad \exp\left(\xi\left(\frac{v}{\lambda}\right)\right) \ll 1$$

où l'on a utilisé l'encadrement $2/\lambda \le v/\lambda \le 3$ et les proprietés (2.1) de la fonction ξ pour établir la dernière majoration.

• Pour $v \le a_\lambda + 1$, la croissance de la fonction ρ_λ sur $]0, a_\lambda]$ entraîne $R_4 + R_5 \ll \rho_\lambda(v-1)(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}$ et

$$\begin{aligned}
R_6 &\ll \frac{1}{\log(y/\lambda)} \int_{\frac{y}{\lambda}}^{\frac{z}{\lambda}} (\lambda-1)\frac{(\log t)^{\lambda-2}}{t}\rho_\lambda(\frac{\log cx}{\log t}-1)dt \\
&\qquad\qquad + \int_{\frac{y}{\lambda}}^{\frac{z}{\lambda}} \frac{(\log t)^{\lambda-3}\log cx}{t}\rho_\lambda'(\frac{\log cx}{\log t}-1)dt \\
&\ll \frac{\rho_\lambda(v-1)}{\log(y/\lambda)} \int_{\frac{y}{\lambda}}^{\frac{z}{\lambda}} (\lambda-1)\frac{(\log t)^{\lambda-2}}{t}dt \\
&\qquad\qquad + \frac{(\log(z/\lambda))^{\lambda-1}}{\log(y/\lambda)} \int_{\frac{y}{\lambda}}^{\frac{z}{\lambda}} \frac{\log cx}{t(\log t)^2}\rho_\lambda'(\frac{\log cx}{\log t}-1))dt \\
&\ll \rho_\lambda(v-1)(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}.
\end{aligned}$$

Il en découle, compte tenu de (2.5), que

$$R_4 + R_5 + R_6 \ll \rho_\lambda(v)(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}\exp(\xi(v/\lambda)) \ll \rho_\lambda(v)(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}.$$

• Pour $a_\lambda + 1 < v \le a_\lambda + 2$, l'inégalité $\rho_\lambda(s) \le \rho_\lambda(a_\lambda)$, valable pour $s > 0$, fournit la majoration $R_4 + R_5 \ll \rho_\lambda(a_\lambda)(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}$.

De plus, on a

$$\begin{aligned}
R_6 &\ll \frac{1}{\log(y/\lambda)} \int_{\frac{y}{\lambda}}^{\frac{z}{\lambda}} (\lambda-1)\frac{(\log t)^{\lambda-2}}{t}\rho_\lambda(\frac{\log cx}{\log t}-1) \\
&\qquad\qquad + \frac{\log(z/\lambda)^{\lambda-1}}{\log(y/\lambda)} \int_{\frac{y}{\lambda}}^{\frac{z}{\lambda}} \frac{\log cx}{t(\log t)^2}\left|\rho_\lambda'(\frac{\log cx}{\log t}-1)\right| dt.
\end{aligned}$$

La dérivée $\rho'_\lambda(\dfrac{\log cx}{\log t}-1)$ change, au plus une fois, de signe dans l'intervalle $\left[\dfrac{y}{\lambda},\dfrac{z}{\lambda}\right]$. En scindant la deuxième intégrale en deux suivant le signe de cette dérivée et en majorant $\rho_\lambda(s)$ par $\rho_\lambda(a_\lambda)$ pour $s>0$, on voit que R_6 est majoré par la même quantité que R_4+R_5 et, par suite, $R_4+R_5+R_6 \ll \rho_\lambda(a_\lambda)(\log\dfrac{y}{\lambda})^{\lambda-2}$. Grâce à (2.5), on en déduit

$$\begin{aligned} R_4+R_5+R_6 \quad &\ll \rho_\lambda(v)(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}\exp\Big\{(v-a_\lambda)\xi(v/\lambda)\Big\} \\ &\ll \rho_\lambda(v)(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}\exp\Big\{2\xi(v/\lambda)\Big\} \ll \rho_\lambda(v)(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}. \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du lemme 5. □

Lemme 6. *Pour tout $\varepsilon>0$ et f une fonction de la classe $\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$, on a*

$$\sum_{1\le f(p)\le(\frac{y}{\lambda})^\theta}\frac{\log p}{f(p)}\rho_\lambda\Big(v-\frac{\log f(p)}{\log(y/\lambda)}\Big)=\lambda\log(\frac{y}{\lambda})\int_{v-\theta}^{v}\rho_\lambda(t)dt \tag{2.12}$$
$$+O_\varepsilon\left(\rho_\lambda(v)\left\{1+\exp\Big[\xi(v/\lambda)-(\log\frac{y}{\lambda})^{3/5-\varepsilon}\Big]\right\}\right)$$

uniformément pour $y\ge y_0$, $v\ge a_\lambda$ et $0<\theta\le 1$.

Preuve. On note S_1 la somme à estimer et on l'écrit comme une intégrale de Stieltjes

$$S_1=\int_1^{(y/\lambda)^\theta}\rho(v-\frac{\log t}{\log(y/\lambda)})t^{-1}d(m_\lambda(t)).$$

Une double intégration par parties, compte tenu de (2.8), fournit

$$S_1=\lambda\log(\frac{y}{\lambda})\int_{v-\theta}^{v}\rho_\lambda(u)du+O(\lambda\rho_\lambda(v))+R_7,$$

avec $R_7\ll\rho_\lambda(v-\theta)\exp-(\theta\log\dfrac{y}{\lambda})^{3/5-\varepsilon}$

$$+\int_{v-\theta}^{v}\big[|\rho'_\lambda(v-t)|+\log(\frac{y}{\lambda})\rho_\lambda(v-t)\big]\exp-(t\log\frac{y}{\lambda})^{3/5-\varepsilon}dt.$$

En procédant comme dans [3 ; lemme 5], on montre que R_7 est de l'ordre requis. Nous omettons les calculs, qui sont techniques et explicités, pour un cas semblable, dans la preuve du lemme 5 de [3]. □

Lemme 7. (une identité de type Buchstab) *Soient f une fonction de la classe $\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$, x et y deux réels tels que $y/\lambda\le cx$. Alors, on a*

$$\mathcal{S}_f(x,y)=\mathcal{S}_f(x)-\sum_{\frac{y}{\lambda}<f(p)\le cx}\mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p)},p)+O\Big(\frac{x(\log x)^{\lambda-1}}{y^{1-2\eta}}\Big) \tag{2.13}$$

et

$$\mathcal{S}_f(x,y)=\mathcal{S}_f(x,z)-\sum_{y/\lambda<f(p)\le z/\lambda}\mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p)},p)+O\Big(\frac{x(\log x)^{\lambda-1}}{y^{1-2\eta}}\Big) \tag{2.14}$$

pour tout $z\in[y,\lambda cx]$.

Preuve. L'identité (2.14) est une conséquence directe de (2.13). Pour établir (2.13), on écrit

$$\mathcal{S}_f(x,y)=\mathcal{S}_f(x)-\sum_{\substack{f(n)\le x\\ \exists p|n\ \ p>y}}1:=\mathcal{S}_f(x)-\ S_2$$

et on réarrange la somme S_2 suivant le plus grand diviseur premier de l'entier n

$$\begin{aligned}
S_2=&\sum_{p>y}\sum_{\substack{f(n)\le x\\ P(n)=p}}1\\
=&\sum_{p>y}\sum_{\substack{f(n)\le x\\ P(n)=p\ ,p\|n}}1+\sum_{p>y}\sum_{\substack{f(n)\le x\ ,P(n)=p\\ \exists k\ge 2\ \ p^k\|n}}1\\
=&\sum_{\substack{f(p)\le cx\\ p>y}}\sum_{\substack{f(m)\le\frac{x}{f(p)}\\ P(m)<p}}1+\sum_{\substack{p>y\\ k\ge 2,\,f(p^k)\le cx}}\sum_{\substack{f(m)\le\frac{x}{f(p^k)}\\ P(m)<p}}1\\
=&\sum_{\substack{f(p)\le cx\\ p>y}}\Big[\mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p)},p)-\sum_{\substack{f(m)\le\frac{x}{f(p)}\\ P(m)=p}}1\Big]+\sum_{\substack{p>y\\ k\ge 2\\ f(p^k)\le cx}}\sum_{\substack{f(m)\le\ \frac{x}{f(p^k)}\\ P(m)<p}}1\\
:=&\sum_{\substack{f(p)\le cx\\ p>y}}\mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p)},p)+\quad R_8.
\end{aligned}$$

D'où l'égalité $$\mathcal{S}_f(x,y)=\mathcal{S}_f(x)-\sum_{\frac{y}{\lambda}<f(p)\le cx}\mathcal{S}_f(\tfrac{x}{f(p)},p)+\quad R_8.$$

Il nous reste à montrer que R_8 est englobé par le terme reste de l'expression (2.13). Pour cela, on commence par remarquer que

$$R_8\ll\sum_{p>y}\sum_{\substack{f(m)\le\frac{x}{f(p)f(p^k)}\\ k\ge 1}}1+\sum_{p>y}\sum_{\substack{f(m)\le\frac{x}{f(p^k)}\\ k\ge 2}}1.$$

Puis, on utilise la relation

$$\sum_{f(m)\le\frac{x}{t}}1\ll\frac{x}{t}(\log x)^{\lambda-1}\qquad(x\ge 2t\ge 2), \tag{2.15}$$

obtenue à partir de l'expression (1.3), pour établir la majoration

$$R_8 \ll \sum_{\substack{p>y \\ k\geq 1}} \frac{x(\log x)^{\lambda-1}}{f(p)f(p^k)} + \sum_{\substack{p>y \\ k\geq 2}} \frac{x(\log x)^{\lambda-1}}{f(p^k)}.$$

Compte tenu des relations données dans $(*)$, il s'ensuit

$$R_8 \ll x(\log x)^{\lambda-1} \sum_{p>y} \left(\sum_{k\geq 1} \frac{\lambda}{pp^{k(1-\eta)}} + \sum_{k\geq 2} \frac{1}{p^{k(1-\eta)}} \right)$$

$$\ll x(\log x)^{\lambda-1} \left(\sum_{p>y} \frac{1}{p^{2-\eta}} + \frac{1}{p^{2-2\eta}} \right) \ll \frac{x(\log x)^{\lambda-1}}{y^{1-2\eta}}.$$

Ce qui achève la preuve de l'identité (2.13) et celle du lemme. $\square$

Lemme 8. (une inégalité de convolution fonctionnelle) *Soient f une fonction de la classe $\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$, x et y deux réels tels que $y/\lambda \leq cx$. On a*

$$(2.16) \qquad (\log cx)\mathcal{S}_f(x,y) \leq \mathcal{S}_f(x,y)\log c + \int_{1/c}^{x} \frac{\mathcal{S}_f(t,y)}{t}dt$$

$$+ \sum_{\substack{1\leq f(p^k)\leq cx \\ p\leq y}} \mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p^k)}, y) \log f(p^k).$$

Preuve. Le point de départ est la somme $\displaystyle\sum_{f(n)\leq x;\, P(n)\leq y} \log(cf(n))$, qu'on interprète de deux manières différentes. D'une part, en l'écrivant sous la forme d'une intégrale de Stieltjes et en intégrant par parties, on a

$$\sum_{\substack{f(n)\leq x \\ P(n)\leq y}} \log(cf(n)) = \int_{1/c}^{x} (\log ct) d\mathcal{S}_f(t,y)$$

$$= (\log cx)\mathcal{S}_f(x,y) - \int_{1/c}^{x} \frac{\mathcal{S}_f(t,y)}{t}dt.$$

D'autre part, en écrivant $\log(f(n)) = \sum_{p^k \| n} \log(f(p^k))$ et en permutant les sommes, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{f(n)\le x\\ P(n)\le y}} \log(cf(n)) &= \mathcal{S}_f(x,y)\log c + \sum_{\substack{p\le y\\ f(p^k)\le cx}} \log f(p^k) \sum_{\substack{f(m)\le \frac{x}{f(p^k)}\\ P(m)\le y\\ (m,p)=1}} 1\\ &\le \mathcal{S}_f(x,y)\log c + \sum_{\substack{1\le f(p^k)\le cx\\ p\le y}} \log f(p^k)\mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p^k)},y),\end{aligned}$$

où l'on a majoré $\Big[\log f(p^k) \sum_{\substack{f(m)\le \frac{x}{f(p^k)}\\ P(m)\le y,\,(m,p)=1}} 1\Big]$ par zéro quand $f(p^k) < 1$ et $\Big[\sum_{\substack{f(m)\le \frac{x}{f(p^k)}\\ P(m)\le y,\,(m,p)=1}} 1\Big]$ par $\mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p^k)},y)$ lorsque $f(p^k)\ge 1$. $\square$

3. Démonstration du théorème

Le théorème s'obtient par conjonction des deux propositions suivantes.

Proposition 1. *Pour toute fonction $f\in\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$, il existe $x_0>0$ tel que l'on ait*

$$\mathcal{S}_f(x,y) = F.x\left(\log\frac{y}{\lambda}\right)^{\lambda-1}\rho_\lambda(v)\left\{1+O\left(\frac{\log\log x}{\inf(\log x,\log(y/\lambda))}\right)\right\}$$

uniformément pour $x\ge x_0$ et $0<v\le a_\lambda+2$.

Proposition 2. *Pour toute fonction $f\in\mathcal{E}_{\lambda,\eta}$ et tout $\varepsilon>0$, il existe un réel $x_0>0$ tel que l'on ait*

$$\mathcal{S}_f(x,y) = F.x\left(\log\frac{y}{\lambda}\right)^{\lambda-1}\rho_\lambda(v)\left\{1+O_\varepsilon\left(\frac{\log\log x+\log(v+1)}{\log y/\lambda}\right)\right\}$$

uniformément pour $x\ge x_0$ et $a_\lambda+1\le v\le \dfrac{\log cx}{(\log\log cx)^{\frac{5}{3}+\varepsilon}}$.

3.1. Démonstration de la proposition 1. Nous montrons, par récurrence sur l'entier k, que :
Pour $y\ge y_0$, tout entier $k\in[1,a_\lambda+2]$ et tout $v\in]k-1,k]$, on a

$$(\mathcal{R})\qquad \mathcal{S}_f(x,y) = F.x(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-1}\rho_\lambda(v)\left\{1+O\left(\frac{\log\log x}{\inf(\log x,\log(y/\lambda))}\right)\right\}.$$

3.1.1. Pour $k=1$, on a $cx \le y/\lambda$. Sous cette condition et pour $y \ge y_0$, tout entier n, vérifiant $f(n) \le x$, admet tous ses diviseurs premiers dans l'intervalle $[2,y]$. En effet, supposons qu'un tel entier admette un diviseur premier $p > y$ avec une multiplicité égale à r. Comme $f(p) = p/\lambda$, on voit que $r > 1$. Or, pour $r \ge 2$, on a $f(p^r) \gg p^{r(1-\eta)}$ et, par suite, $y^{2(1-\eta)} \ll y/\lambda$. Comme $2(1-\eta) > 1$, ceci est impossible dès que $y \ge y_0$ pour un choix convenable de y_0. Par conséquent, on a

$$\mathcal{S}_f(x,y) = \mathcal{S}_f(x) \qquad (cx \le y/\lambda \text{ et } y \ge y_0). \tag{3.1}$$

D'autre part, en remarquant que $(\log x/\log cx)^{\lambda-1} = 1 + O(1/\log x)$, l'estimation (1.3) permet d'écrire

$$\mathcal{S}_f(x) = F.x(\log \frac{y}{\lambda})^{\lambda-1}\frac{v^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\left\{1 + O\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)\right\} \qquad (y \ge y_0). \tag{3.2}$$

Ce qui établit l'égalité $(\mathcal{R})$ pour $k=1$, car $\rho_\lambda(v) = v^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$ sur $]0,1]$.

3.1.2. Pour $k=2$, on a $v \in]1,2]$. En remarquant que, pour $v \in]1,2]$ et $p > y \ge y_0$, la quantité $\mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p)}, p)$ vérifie (3.1), l'identité (2.13) s'écrit

$$\mathcal{S}_f(x,y) = \mathcal{S}_f(x) - \sum_{\frac{y}{\lambda} < f(p) \le cx} \mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p)}) + O\Big(\frac{x(\log x)^{\lambda-1}}{y^{1-2\eta}}\Big). \tag{3.3}$$

Supposons d'abord que $x^\delta \le y/\lambda \le cx$, où $\delta := 1 - \dfrac{1}{\log(y/\lambda)}$. L'expression précédente devient

$$\mathcal{S}_f(x,y) = \mathcal{S}_f(x) + O\left(S_3\right) + O\left(\frac{x(\log x)^{\lambda-1}}{y^{1-2\eta}}\right), \tag{3.4}$$

avec $S_3 := \displaystyle\sum_{x^\delta < f(p) \le cx} \mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p)})$. La majoration (2.15) implique

$$\begin{aligned} S_3 &\ll (\log x)^{\lambda-1} \sum_{x^\delta \le f(p) \le cx} \frac{x}{f(p)} \\ &\ll (\log x)^{\lambda-1} x^{1-\delta} \sum_{x^\delta \le f(p) < cx} 1 \\ &\ll (\log x)^{\lambda-1} x^{1-\delta} \pi(\lambda cx). \end{aligned}$$

Comme $x^{1-\delta} \le (cx)^{1-\delta} \le e^2$ et $\pi(\lambda cx) \ll \dfrac{\lambda cx}{\log(\lambda cx)}$, on conclut que

$$S_3 \ll \frac{x(\log x)^{\lambda-1}}{\log y}. \tag{3.5}$$

En insérant cette majoration et l'égalité (3.2) dans l'expression (3.4), on obtient

$$\mathcal{S}_f(x,y) = F.x(\log \frac{y}{\lambda})^{\lambda-1}\frac{v^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\left\{1+O\left(\frac{\log\log x}{\log y}\right)\right\}.$$

Cela entraîne l'égalité $(\mathcal{R})$, car

$$\left\{\begin{array}{l}\rho_\lambda(v) = \dfrac{1}{\Gamma(\lambda)}\Big(v^{\lambda-1} - \lambda\displaystyle\int_1^v (v-h)^{\lambda-1}\frac{dh}{h}\Big)\\ \rho_\lambda(v) \gg 1\end{array}\right. \tag{3.6}$$

pour $v \in]1,2]$ et

$$\lambda\int_1^v (v-h)^{\lambda-1}\frac{dh}{h} \leq \lambda\int_0^{v-1} t^{\lambda-1}dt \leq (v-1)^\lambda \ll \frac{1}{\log y}$$

pour $x^\delta \leq y/\lambda \leq cx$.

Examinons maintenant le cas $y/\lambda \leq x^\delta$. Sous cette hypothèse, l'expression (3.3) devient

$$\mathcal{S}_f(x,y) = \mathcal{S}_f(x) - S_4 - S_3 + O\Big(\frac{x(\log x)^{\lambda-1}}{y^{1-2\eta}}\Big), \tag{3.7}$$

où S_3 est la somme définie précédemment et $S_4 := \displaystyle\sum_{\frac{y}{\lambda}<f(p)\leq x^\delta} \mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p)})$. La majoration de S_3, donnée par (3.5), est admissible. Par ailleurs, compte tenu de l'égalité (1.3), on écrit

$$S_4 := M + R_9,$$

avec

$$M := \frac{F}{\Gamma(\lambda)}x\sum_{\frac{y}{\lambda}<f(p)\leq x^\delta}\frac{(\log(x/f(p)))^{\lambda-1}}{f(p)}$$

et

$$R_9 \ll x\sum_{\frac{y}{\lambda}<f(p)\leq x^\delta}\frac{\log\log(x/f(p))(\log(x/f(p)))^{\lambda-2}}{f(p)}.$$

Pour $\beta = \lambda - 1$, le lemme 4 fournit

$$M = \frac{F}{\Gamma(\lambda)}x(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-1}\Big[\lambda\int_1^v (v-h)^{\lambda-1}\frac{dh}{h} + O\Big(\frac{1}{\log(y/\lambda)}\Big)\Big].$$

On majore $|\log\log(x/f(p))|$ par $\log\log x$ puis on applique le lemme 4 avec $\beta = \lambda - 2$; on obtient

$$R_9 \ll x(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}\log\log x\int_1^v (v-h)^{\lambda-2}\frac{dh}{h} \ll x(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}\log\log x.$$

Il s'ensuit

$$S_4 = \frac{F}{\Gamma(\lambda)} x(\log \frac{y}{\lambda})^{\lambda-1}\Big[\lambda \int_1^v (v-h)^{\lambda-1}\frac{dh}{h} + O\Big(\frac{\log\log x}{\log(y/\lambda)}\Big)\Big].$$

En insérant cette dernière, l'égalité (3.2) et la majoration (3.5) dans l'expression (3.7) et en tenant compte de (3.6), on aboutit, dans ce cas aussi, à l'égalité $(\mathcal{R})$.

3.1.3. Supposons que l'égalité $(\mathcal{R})$ est vérifiée pour un entier $k \in [2, a_\lambda + 1]$ et montrons la pour $k+1$. A cette fin, on considère $v \in]k, k+1]$, on prend $z = \lambda(cx)^{\frac{1}{k}} = \lambda(y/\lambda)^{v/k}$ et on rappelle l'identité (2.14)

$$\mathcal{S}_f(x,y) = \mathcal{S}_f(x,z) - \sum_{\frac{y}{\lambda} < f(p) \le \frac{z}{\lambda}} \mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p)}, p) + O\Big(\frac{x(\log x)^{\lambda-1}}{y^{1-2\eta}}\Big).$$

En posant, pour $y < p \le z$, $v_p = \dfrac{\log(cx/f(p))}{\log(p/\lambda)} = \dfrac{\log cx}{\log(p/\lambda)} - 1$, on constate que $v_p \in]k-1, v-1] \subset]k-1, k]$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p)}, p) = F.\frac{x}{f(p)}(\log\frac{p}{\lambda})^{\lambda-1}\rho_\lambda(v_p)\left\{1 + O\left(\frac{\log\log(x/f(p))}{\log(p/\lambda)}\right)\right\}.$$

Sachant que $f(p) = p/\lambda$, il suit

$$\begin{aligned}\sum_{\frac{y}{\lambda} < f(p) \le \frac{z}{\lambda}} \mathcal{S}_f(\frac{x}{f(p)}, p) = \ & F.x\Bigg[\sum_{\frac{y}{\lambda} < f(p) \le \frac{z}{\lambda}} \frac{(\log f(p))^{\lambda-1}\rho_\lambda(v_p)}{f(p)} \\ & +O\Big(\sum_{\frac{y}{\lambda} < f(p) \le \frac{z}{\lambda}} \frac{(\log f(p))^{\lambda-2}\rho_\lambda(v_p)\log\log(x/f(p))}{f(p)}\Big)\Bigg] \\ := \ & F.x[\,M_2 + R_{10}\,].\end{aligned}$$

Le lemme 5 fournit

$$M_2 = (\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-1}\left[\lambda v^{\lambda-1}\int_k^v \rho_\lambda(u-1)\frac{du}{u^\lambda} + O\left(\frac{\rho_\lambda(v)}{\log(y/\lambda)}\right)\right].$$

Pour estimer R_{10}, nous utilisons la majoration $\rho_\lambda(v_p) \ll \rho_\lambda(v)$, que nous montrons d'abord.

• Si $v \le a_\lambda + 1$, on majore $\rho_\lambda(v_p)$ par $\rho_\lambda(v-1)$, car la fonction ρ_λ est croissante sur $]0, a_\lambda]$ et $v_p \le v - 1 \le a_\lambda$. Il en découle, en vertu de (2.5), que

$$\rho_\lambda(v_p) \ll \exp\{\xi(v/\lambda)\}\rho_\lambda(v).$$

• Si $a_\lambda + 1 < v \le a_\lambda + 2$, on majore $\rho_\lambda(v_p)$ par $\rho_\lambda(a_\lambda)$, le maximum de la fonction ρ_λ. Comme pour le cas précédent, la relation (2.5) fournit

$$\rho_\lambda(a_\lambda) \ll \rho_\lambda(v)\exp\{(v-a_\lambda)\xi(v/\lambda\} \ll \rho_\lambda(v)\exp\{2\xi(v/\lambda)\}.$$

On obtient la majoration souhaitée en remarquant que, dans les deux cas, on a $v/\lambda \in]0,3]$ et, d'après le lemme 1, la fonction $t \mapsto \exp\{\xi(t)\}$ est bornée sur cet intervalle. Ceci étant, on peut majorer R_{10} par

$$\ll (\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}\rho_\lambda(v)\log\log x \sum_{(y/\lambda)<f(p)\le(z/\lambda)}\frac{1}{f(p)}.$$

La relation (2.7) et le choix de z nous permettent de conclure que

$$R_{10} \ll (\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}\rho_\lambda(v)\log(\frac{v}{k})\log\log x \ll (\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-2}\rho_\lambda(v)\log\log x.$$

Nous déduisons de ce qui précède

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_f(x,y) = \mathcal{S}_f(x,z) - F.x(\log\frac{y}{\lambda})^{\lambda-1} \\ \times\left[\lambda v^{\lambda-1}\int_k^v \rho_\lambda(u-1)\frac{du}{u^\lambda} + O(\frac{\rho_\lambda(v)\log\log x}{\log(y/\lambda)})\right].\end{aligned}$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\mathcal{S}_f(x,z)$ et en tenant compte de (2.3), on obtient l'égalité $(\mathcal{R})$ pour $k+1$. Ce qui achève la preuve de la proposition 1.

3.2. Démonstration de la proposition 2. Pour $x \ge \dfrac{1}{c}$ et $y > \lambda$, on pose

$$\mathcal{S}_f(x,y) = F.x(\log(y/\lambda))^{\lambda-1}\rho_\lambda(v)\Big(1+\Delta(v,y)\Big)$$

et, pour $v \ge a_\lambda + 1$, on note

$$\Delta^{**}(v,y) := \sup_{0\le u\le v}|\Delta(u,y| \text{ et } \Delta^{*}(v,y) := \sup_{a_{\lambda+1}\le u\le v}|\Delta(u,y|.$$

Remarquons d'abord que, d'après la proposition 1, il existe $x_0 > 0$ tel que $\Delta^{**}(a_\lambda+1,y) \le 1$ pour $x \ge x_0$; par conséquent, on a

$$\Delta^{**}(v,y) \le 1 + \Delta^{*}(v,y) \qquad (x \ge x_0). \tag{3.8}$$

On remplace, dans l'inégalité (2.16), $\mathcal{S}_f(x,y)$ par l'expression ci-dessus, on majore $\log f(p)$ par $\log p$ et, pour $k \ge 1$, on note $v_{p^k} := \dfrac{\log(f(p^k))}{\log(y/\lambda)}$. Après simplification, on obtient

$$1+\Delta(v,y) \le \frac{(1+\Delta(v,y))\log c}{\log cx} + A_1 + A_2 + A_3$$

avec

$$A_1 := \frac{1}{\rho_\lambda(v)\log(cx)} \sum_{1\le f(p)\le \frac{y}{\lambda}} \frac{\log p}{f(p)}\rho_\lambda(v-v_p)\Big[1+\Delta(v-v_p,y)\Big],$$

$$A_2 := \frac{1}{\rho_\lambda(v)\log(cx)} \sum_{\substack{1\le f(p^k)\le cx\\ k\ge 2,\, p\le y}} \frac{\log f(p^k)}{f(p^k)}\rho_\lambda(v-v_{p^k})\Big[1+\Delta(v-v_{p^k},y)\Big],$$

$$A_3 := \frac{1}{\rho_\lambda(v)x\log cx}\int_{1/c}^{x}\rho_\lambda\Big(\frac{\log ct}{\log(y/\lambda)}\Big)\Big[1+\Delta\Big(\frac{\log ct}{\log(y/\lambda)},y\Big)\Big].$$

Donc

$$|\Delta(v,y)| \le \frac{(1+\Delta^{**}(v,y))\log c}{\log cx} + |A_1-1| + |A_2| + |A_3|. \tag{3.9}$$

Il est facile d'établir

$$A_3 \le \frac{1+\Delta^{**}(v,y)}{x\log cx}\int_{1/c}^{x}\frac{\rho_\lambda(\frac{\log ct}{\log y/\lambda})}{\rho_\lambda(v)}dt.$$

Le changement de variable $t = x(\frac{y}{\lambda})^{-s}$ dans l'intégrale fournit

$$A_3 \le (1+\Delta^{**}(v,y))\frac{\log(\frac{y}{\lambda})}{\log cx}\int_0^v \frac{\rho_\lambda(v-s)}{\rho_\lambda(v)}\Big(\frac{y}{\lambda}\Big)^{-s}ds.$$

Il en découle, compte tenu de (2.5), que

$$A_3 \ll \frac{(1+\Delta^{**}(v,y))}{v}\int_0^v \exp\{s(\xi(\frac{v}{\lambda}) - \log(\frac{y}{\lambda}))\}ds.$$

Il s'ensuit, grâce à (2.1), que

$$A_3 \ll \frac{(1+\Delta^{**}(v,y))}{v}\int_0^v \exp\{-b_0 s\log(\frac{y}{\lambda})\}ds \qquad \big((x,y)\in\mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda,c}(x_0)\big),$$

où b_0 un est réel strictement positif convenable. Ainsi, on a

$$A_3 \ll \frac{1+\Delta^{**}(v,y)}{v\log(\frac{y}{\lambda})} \qquad \big((x,y)\in\mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda,c}(x_0)\big). \tag{3.10}$$

De même,

$$A_2 \ll \frac{(1+\Delta^{**}(v,y))}{\log cx}\sum_{\substack{1\le f(p^k)\le cx\\ k\ge 2,\, p\le y}} \frac{\log f(p^k)}{f(p^k)}\frac{\rho_\lambda(v-v_{p^k})}{\rho_\lambda(v)}.$$

La majoration (2.5) implique

$$A_2 \ll \frac{(1+\Delta^{**}(v,y))}{\log cx}\sum_{\substack{1\le f(p^k)\le cx\\ k\ge 2,\, p\le y}} \frac{\log f(p^k)}{(f(p^k))^{1-b_1}}$$

avec $b_1 = \dfrac{\xi(v/\lambda)}{\log(y/\lambda)}$. Or, pour $f \in \mathcal{E}_{\lambda,\eta}$ et k entier, $k \geq 2$, on a les majorations $\log(f(p^k)) \ll k \log p$ et $p^{k(1-\eta)} \ll f(p^k)$. Cela fournit

$$\begin{aligned} A_2 &\ll \frac{(1 + \Delta^{**}(v, y))}{v \log(y/\lambda)} \sum_{\substack{1 \leq f(p^k) \leq cx \\ k \geq 2,\, p \leq y}} \frac{k \log p}{p^{k(1-b_1)(1-\eta)}} \\ &\ll \frac{(1 + \Delta^{**}(v, y))}{v \log(y/\lambda)} \sum_{p \leq y} \frac{\log p}{p^{2(1-b_1)(1-\eta)}} \sum_{k \geq 0} \frac{(k+2)}{2^{k(1-b_1)(1-\eta)}}. \end{aligned}$$

Sachant que $\eta \in]0, 1/2[$, le lemme 1 implique que $2(1 - b_1)(1 - \eta) > 1$ pour un choix convenable de x_0 et $(x, y) \in \mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda,c}(x_0)$. Par conséquent,

$$A_2 \ll_\varepsilon \frac{(1 + \Delta^{**}(v, y))}{v \log(y/\lambda)} \qquad \big((x, y) \in \mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda,c}(x_0)\big). \tag{3.11}$$

En appliquant le lemme 6 pour $\theta = 1/2$ et pour $\theta = 1$, on a

$$\begin{aligned} |A_1 - 1| \;&\leq\; \beta(v)\Delta^*(v, y) + \Big(1 - \beta(v)\Big)\Delta^*(v - \tfrac{1}{2}, y) \\ &\quad + O_\varepsilon\left(\frac{1 + \Delta^{**}(v, y)}{\log cx}\Big\{1 + \exp(\xi(v/\lambda) - (\log y/\lambda)^{\frac{3}{5} - \varepsilon})\Big\}\right), \end{aligned}$$

où l'on a posé $\beta(v) = \dfrac{\lambda}{v\rho_\lambda(v)} \displaystyle\int_{v-\frac{1}{2}}^{v} \rho_\lambda(t)dt$ et l'on a utilisé l'identité (2.2) pour montrer $\dfrac{\lambda}{v\rho_\lambda(v)} \displaystyle\int_{v-1}^{v-\frac{1}{2}} \rho_\lambda(t)dt = 1 - \beta(v)$. Pour $(x, y) \in \mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda,c}(x_0)$, le terme reste du membre de droite de cette inégalité est $O_\varepsilon\Big(\dfrac{1 + \Delta^{**}(v, y)}{\log cx}\Big)$. Il s'ensuit, compte tenu des expressions (3.9), (3.10) et (3.11), que

$$\begin{aligned} |\Delta(v, y)| \leq \beta(v)\Delta^*(v, y) &+ \big(1 - \beta(v)\big)\Delta^*(v - \frac{1}{2}, y) \\ &+ O_\varepsilon\Big(\frac{1 + \Delta^{**}(v, y)}{\log cx}\Big) \end{aligned} \tag{3.12}$$

pour $(x, y) \in \mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda,c}(x_0)$. Par ailleurs, il résulte de la décroissance de la fonction ρ_λ sur $[a_\lambda, \infty[$ et de l'égalité (2.2) que, pour $v \geq a_\lambda + 1$, on a

$$\begin{aligned} 2\beta(v) &= \frac{2\lambda}{v\rho_\lambda(v)} \int_{v-\frac{1}{2}}^{v} \rho_\lambda(t)dt \\ &\leq \frac{\lambda}{v\rho_\lambda(v)} \int_{v-1}^{v-\frac{1}{2}} \rho_\lambda(t)dt + \frac{\lambda}{v\rho_\lambda(v)} \int_{v-\frac{1}{2}}^{v} \rho_\lambda(t)dt \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\beta(v) \leq \dfrac{1}{2}$ pour $v \geq a_\lambda + 1$ et, par suite,

$$\beta(v)\Delta^*(v,y) + \big(1-\beta(v)\big)\Delta^*(v-\frac{1}{2},y) \leq \frac{1}{2}\Big(\Delta^*(v,y) + \Delta^*(v-\frac{1}{2},y)\Big).$$

Compte tenu de (3.8) et (3.12), on en déduit

$$|\Delta(v,y)| \leq \frac{1}{2}\big(\Delta^*(v,y) + \Delta^*(v-\frac{1}{2},y)\big) + O_\varepsilon\Big(\frac{1+\Delta^*(v,y)}{v\log(y/\lambda)}\Big) \tag{3.13}$$

pour $(x,y) \in \mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda,c}(x_0)$.

Ceci étant, montrons que, dans cette inégalité, on peut remplacer $|\Delta(v,y)|$ par $\Delta^*(v,y)$. Pour cela, prenons un réel v', $a_\lambda + 1 \leq v' \leq v$.

• Si $v - \frac{1}{2} \leq v' \leq v$, en observant que $\dfrac{1}{v'} \ll \dfrac{1}{v}$ et en tenant compte de la croissance en t de la fonction $\Delta^*(t,y)$, l'expression (3.13) implique

$$|\Delta(v',y)| \leq \frac{1}{2}\left[\Delta^*(v,y) + \Delta^*(v-\frac{1}{2},y)\right] + O_\varepsilon\Big(\frac{1+\Delta^*(v,y)}{v\log(y/\lambda)}\Big). \tag{3.14}$$

• Si $a_\lambda + 1 \leq v' < v - \frac{1}{2}$, on a les majorations

$$|\Delta(v',y)| \leq \Delta^*(v-\frac{1}{2},y) \leq \frac{1}{2}\left(\Delta^*(v,y) + \Delta^*(v-\frac{1}{2},y)\right).$$

Donc, (3.14) est encore vérifiée dans ce cas. En prenant le supremum de l'expression (3.14) lorsque $v' \in [a_\lambda + 1, v]$, on obtient l'inégalité souhaitée, à savoir,

$$\Delta^*(v,y) \leq \frac{1}{2}(\Delta^*(v,y) + \Delta^*(v-\frac{1}{2},y)) + O_\varepsilon\Big(\frac{1+\Delta^*(v,y)}{v\log(y/\lambda)}\Big)$$

ou encore

$$\Delta^*(v,y) \leq \Delta^*(v-\frac{1}{2},y) + O_\varepsilon\Big(\frac{1+\Delta^*(v,y)}{v\log(y/\lambda)}\Big) \qquad \Big((x,y) \in \mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda,c}(x_0)\Big).$$

Une itération de cette inégalité jusqu'à un réel $v_0 \in [a_\lambda + \frac{1}{2}, a_\lambda + 1]$ fournit

$$\Delta^*(v,y) \leq \Delta^*(v_0,y) + O_\varepsilon\left\{\frac{\log v}{\log(y/\lambda)}(1+\Delta^*(v,y))\right\}.$$

En appliquant la proposition 1, on a

$$\Delta^*(v_0,y) \ll \frac{\log\log x}{\log(y/\lambda)}.$$

Ce qui implique

$$\Delta^*(v,y) \ll_\varepsilon \Big(1+\Delta^*(v,y)\Big)\frac{\log(v) + \log\log(x)}{\log(y/\lambda)}$$

ou encore

$$\Delta^*(v,y) \ll_\varepsilon \frac{\log(v+1) + \log\log(x)}{\log(y/\lambda)}.$$

Cela achève la démonstration de la proposition 2.

4. Démonstration du corollaire.

Remarquons d'abord que, pour $\varepsilon > 0$ et un choix convenable de x_0, on a $\mathcal{H}_{2\varepsilon} \subset \mathcal{H}_\varepsilon \cap \mathcal{H}_{\varepsilon,\lambda,c}(x_0)$. Nous établirons donc le corollaire dans $\mathcal{H}_{2\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$.

Commençons par traiter le cas où u est borné. Dans ce cas, les expressions (1.6) et (1.7) entraînent

$$\frac{\mathcal{S}_f(x,y)}{\mathcal{G}(x,y)} = \frac{\rho_\lambda(v)}{\rho_\lambda(u)}\Big(1 + O(\frac{\log\log x}{\log y})\Big).$$

D'autre part, en écrivant $\dfrac{\rho_\lambda(v)}{\rho_\lambda(u)} = \exp(\displaystyle\int_u^v \frac{\rho'_\lambda(t)}{\rho_\lambda(t)}dt)$, la formule de la moyenne montre qu'il existe $w \in]u,v[$ tel que

$$\int_u^v \frac{\rho'_\lambda(t)}{\rho_\lambda(t)}dt = (v-u)\frac{\rho'_\lambda(w)}{\rho_\lambda(w)}.$$

En remarquant que $v = u + O(\dfrac{1}{\log y})$ et $\dfrac{\rho'_\lambda(w)}{\rho_\lambda(w)} \ll 1$ pour u borné, on en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\rho_\lambda(v)}{\rho_\lambda(u)} = 1$ et que $\mathcal{S}_f(x,y) \sim \mathcal{G}(x,y)$. Ce qui établit le corollaire lorsque u est borné, car la condition (1.8) est trivialement vérifiée dans ce cas.

Supposons maintenant que u n'est pas borné. La formule asymptotique (2.6) et les expressions (1.6) et (1.7) fournissent alors

$$\frac{\mathcal{S}_f(x,y)}{\mathcal{G}(x,y)} = \Big\{\sqrt{\frac{\sigma_2(u)}{\sigma_2(v)}}\exp\big[\sigma_0(v) - \sigma_0(u) - v\xi(v/\lambda) + u\xi(u/\lambda)\big]\Big\}$$
$$\times\Big\{1 + O_\varepsilon\Big(\frac{\log\log x}{\log y}\Big) + O_\varepsilon\Big(\frac{1}{u+\lambda}\Big)\Big\}$$

uniformément pour $x \geq x_0$ et $(x,y) \in \mathcal{H}_{2\varepsilon}$. Par ailleurs, on a ([7 ; lemme 4.5])

$$\sigma_2(t) = t\left(1 + O\left(\frac{1}{1+\log(t/\lambda)}\right)\right) \qquad (t > \lambda).$$

Comme $v = u(1 + O(1/\log y)$, il en découle

$$\sigma_2(u) = \sigma_2(v)\left(1 + O\left(\frac{1}{1+\log(u/\lambda)}\right)\right) \qquad (u > \lambda)$$

et, par conséquent,

$$\frac{\mathcal{S}_f(x,y)}{\mathcal{G}(x,y)} = e^{K(x,y)}\left\{1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log\log x}{\log y}\right) + O_\varepsilon\left(\frac{1}{1+\log(u/\lambda)}\right)\right\},$$

où l'on a posé $K(x,y) := \sigma_0(v) - \sigma_0(u) - v\xi(v/\lambda) + u\xi(u/\lambda)$. En observant, compte tenu des définitions de σ_0 et de ξ, que

$$K(x,y) = \lambda \int_{\xi(u/\lambda)}^{\xi(v/\lambda)} \left(\frac{e^t - 1}{t} - e^t\right) dt = \lambda \int_{\xi(u/\lambda)}^{\xi(v/\lambda)} \frac{e^t(1-t) - 1}{t} dt,$$

l'encadrement $\frac{1}{2} \leq \frac{t-1}{t} \leq 1$, valable pour $t \geq 2$, fournit

$$\frac{1}{2} K_0(x,y) \leq |K(x,y)| \leq K_0(x,y) \qquad (u > 10\lambda),$$

avec $K_0(x,y) = e^{\xi(v/\lambda)} - e^{\xi(u/\lambda)} + \lambda \log\left(\frac{\xi(v/\lambda)}{\xi(u/\lambda)}\right)$. On a aussi

$$K_0(x,y) = \big[v-u\big]\xi(v/\lambda) + u\big[\xi(v/\lambda) - \xi(u/\lambda)\big] + \lambda \log\left(\frac{\xi(v/\lambda)}{\xi(u/\lambda)}\right).$$

En remarquant que $(v-u) = \frac{u}{\log y}\Big[\log\lambda + \frac{\log c}{u}\Big]\Big[1 - \frac{\log\lambda}{\log y}\Big]^{-1}$ et en tenant compte de (2.1), on voit que $K_0(x,y)$ et par suite $K(x,y)$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini si, et seulement si, la condition (1.8) est réalisée. Ceci achève la preuve du corollaire.

Bibliographie

[1] R. BALASUBRAMANIAN, K. RAMACHANDRA, *On the number of integers such that* $nd(n) \leq x$. Acta Arith. **49** (1988), 313–322.

[2] D. HENSLEY, *The convolution powers of the Dickman fonction.* J. London Math. Soc. (2) **33** (1986), 395–406.

[3] A. HILDEBRAND, *On the number of positive integers* $\leq x$ *and free of prime factors* $\geq y$. Journal of Number Theory **22** (1986), 289–307.

[4] A. HILDEBRAND, *The asymptotic behaviour of the solutions of a class of differencial-difference equations.* J. London Math. Soc. (2) **42** (1990), 11–31.

[5] A. HILDEBRAND, G. TENENBAUM, *Integers without large prime factors.* J. Théorie des Nombres de Bordeaux **5** (1993), 209–251.

[6] M. NAIMI, *Répartition des valeurs de la fonction* ϕ *d'Euler et la fonction somme de diviseurs sur les entiers sans grand facteur premier.* Annal. Univ. Sci. Budapest. **42** (1999), 147–164.

[7] H. SMIDA, *Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman.* Acta Arith. **59** (1991), 123–143.

[8] H. SMIDA, *Valeur moyenne des fonctions de Piltz sur les entiers sans grand facteur premier.* Acta Arith. **63** (1993), 21–50.

[9] A. SMATI, J. WU, *Distribution of values of some multiplicative functions over integers free of large prime factors.* Quart. J. Math. Oxford (2) **50** (1999), 111-130.

[10] G. TENENBAUM, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Cours spécialisés, Collection S.M.F. **no. 1** (1995).

[11] G. TENENBAUM, J. WU *Moyenne de certaines fonctions multiplicatives sur les entiers friables.* J. Reine Angew Math. à paraître.

Mongi NAIMI
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Tunis
1060 TUNIS, TUNISIE
E-mail : `mongi.naimi@fst.rnu.tn`