Computer-Aided Solution of Open Problems in Mathematics Teaching. Part 1[1]

Compiled and edited by

H. Schumann, Weingarten, and Th. Weth, Nürnberg

Computerunterstützung offener Aufgabenstellungen im Geometrieunterricht

Thomas Weth, Nürnberg

Abstract: *Computers and open problem settings in geometry teaching.* The conventional and traditional way of mathematics teaching for the most part relies on practising and performance of algorithms and solutions of certain kinds of problems. The exclusive objective of the required activities for solving the convergent problems that are generally used in this connection is to achieve methodological competence. This approach reduces mathematics teaching to the purpose of achieving calculational competence and ignores an essential inherent component, namely the chance to stimulate the creativity and create incentives to generate something completely new. Lack of appropriate tools may be one reason explaining the fact that this creative aspect has been left almost unconsidered in teaching practice so far, because solving "open problems" requires specific tools and means. The following article is intended to demonstrate, with a concrete example from geometry teaching at lower secondary level, the opportunities opened up by the computer when used as a tool for introducing in class the typical problems and mathematical problem solving strategies required for mathematics beyond methods and calculational competence.

Kurzreferat: Der herkömmliche, traditionelle Mathematikunterricht besteht zu einem Großteil aus dem Einüben und Ausführen von Algorithmen und Lösungswegen für bestimmte Aufgabentypen. Die Aktivitäten bei den hierzu i. Allg. verwendeten konvergenten Aufgaben zielen dabei ausschließlich auf eine Methodenkompetenz. Unberücksichtigt bleibt dabei zumeist, dass Mathematik sich nicht auf Kalkülkompetenz beschränkt, sondern auch wesentlich von einer kreativen, Neues generierenden Komponente lebt. Dass dieser Aspekt mathematischen Tuns im bisherigen Unterricht wenig Beachtung fand, mag u.a. an mangelnden Werkzeugen gelegen haben, welche die Bearbeitung "offener Aufgaben" ermöglicht hätten. Der nachfolgende Artikel möchte an einem konkreten Themenkreis des Geometrieunterrichts der Sekundarstufe I zeigen, welche Möglichkeiten sich durch den Computer als Werkzeug im Geometrieunterricht erschließen lassen, um über die Methoden- und Kalkülkompetenz hinaus die Schüler mit typischen Fragestellungen und mathematischen Vorgehensweisen bekannt zu machen.

ZDM-Classification: G40, U50

Ziele offener Aufgaben

Im Folgenden sollen unter "offenen Aufgabenstellungen" mathematische Problemstellungen verstanden werden, die – im Gegensatz zu vielen unterrichtsüblichen Aufgaben – nicht konvergent auf eine einzige "korrekte" Lösung abzielen. Ziel von "offenen Aufgaben" soll vielmehr das selbstständige Suchen von Lösungswegen und eigenen Problemen durch den Schüler sein. Hierbei wird als inhaltlicher Rahmen der Beispiele ausschließlich auf unterrichtsrelevante mathematische Inhalte abgezielt. Dass die dargestellten Ergebnisse und Überlegungen allerdings den unterrichtsüblichen Rahmen teilweise verlassen, liegt in der Natur "offener Aufgaben", deren Endergebnis sich quasi "per definitionem" nicht absehen oder einschränken lässt.

So liegt der Bildungswert offener Aufgaben in erster Linie sicherlich nicht in den einzelnen Inhalten. Anders als z.B. "binomische Formeln", "Lösung von Gleichungssystemen", "Kongruenzsätze für Dreiecke" usw., wo die Ergebnisse eine notwendige Wissensbasis für den folgenden Unterricht bilden, kann und darf man von "offenen Aufgaben" derartig Wissenswertes nicht erwarten. Die Zielrichtung ist hier eine andere: Offene Aufgaben dienen dazu, dem Schüler das Prozesshafte der Mathematik zu verdeutlichen, ihn von der verbreiteten Fehlvorstellung abzubringen, Mathematik sei eine "Formelwissenschaft", in der es nichts zu entdecken gäbe und ihn den Prozess mathematischen Denkens und Arbeitens selbst erleben und erfahren zu lassen. Um einen Vergleich mit dem Kunstunterricht zu bemühen: Schüler sollen nicht (wie zumeist im Mathematikunterricht) ein gegebenes Bild abkopieren, nachzeichnen (im "schlimmsten" Fall: Malen nach Zahlen), sondern beim Beschäftigen mit Mathematik (wie im Kunstunterricht) ihre Phantasie, ihre Kreativität, ihren Ehrgeiz, ihr Gespür für Ästhetik beim Erstellen ihres mathematischen (Kunst-) Werkes einsetzen.

[1] Part 2 will be published in ZDM 33 (February 2001) No. 1

Im Folgenden sollen einige Beispiele entwickelt werden, welche eine ähnliche Zielsetzung anstreben, allerdings mathematisch anspruchsvoller sind und somit notwendig zusätzlicher Hilfsmittel – namentlich: des Computers – bedürfen.

Am Themenkreis "Merkwürdige Punkte und Linien des Dreiecks" soll gezeigt werden, wie offene Aufgabenstellungen

- zur Hinführung,
- zur Begleitung und
- zur Ergänzung

eines Themengebiets eingesetzt werden können. Wesentlich ist, dass bei den dargestellten Aktivitäten der Computer ein nicht nur sinnvolles und praktisches, sondern geradezu notwendiges Hilfsmittel darstellt. Ohne ein dynamisches Geometriesystem ließen sich die geschilderten (und zum Teil von Schülern im Unterricht entwickelten) Experimente nicht annähernd durchführen.

Offene Aufgabenstellungen zur Einführung in einen Themenkreis

Im Physikunterricht ist es Standard, dass die Kinder vor dem Erarbeiten mathematisierter Zusammenhänge ein Problemfeld zunächst phänomenologisch kennenlernen. So werden z.B. zur Hinführung zum Hooke'schen Gesetz zunächst die nichtlinearen Kraft-Ausdehnung-Kennlinien von Gummibändern gemessen und ausgewertet; bevor das Ohm'sche Gesetz formuliert wird, experimentiert man mit Kohle oder anderen nichtkonstanten Widerständen, um schließlich als einfachsten Fall die lineare Abhängigkeit von Stromstärke und Spannung bestimmter Materialien entsprechend würdigen zu können. Allgemein lernt der Schüler "viele" verschiedene Phänomene kennen, und – evtl. geleitet durch den Physiklehrer – fokussiert sich die Konzentration auf diejenigen Fälle, die besonders auffällig und/oder besonders einfach zu mathematisieren sind. Sind dem Schüler also einige "kurvige" Kennlinien bekannt, wird er die geradlinigen als etwas wirklich Besonderes und Merkwürdiges erachten können.

Ein völlig anderes Herangehen an sogenannte "Besonderheiten" findet sich dagegen im Mathematikunterricht. In vielen Fällen lernt der Schüler keine Phänomene oder Beispiele kennen, aus denen die merkwürdigen (und deshalb zu lernenden) als etwas Besonderes herausragen. Sehr unvermittelt werden z.B. die merkwürdigen Punkte und Linien des Dreiecks angesteuert und "abgehakt". So erfolgt die "Hinführung" zum Umkreismittelpunkt in der ansonsten sehr guten und reichhaltigen "Anschaulichen Geometrie" (Barth et al. 1989) im Kapitel "Geometrische Örter" (Bd. 2, S. 30 ff.) im Anschluss an den Satz: "Der geometrische Ort der Punkte, die jeweils von A und B gleich weit entfernt sind, ist die Mittelsenkrechte m_{AB}." mit der Überleitung: "Damit beweisen wir zwei wichtige Sätze:
Umkreis-Satz:
Die Mittelsenkrechten eines Dreiecks ..." (S. 33)

Ähnlich werden die anderen merkwürdigen Punkte (Höhenschnittpunkt, Inkreismittelpunkt, Schwerpunkt) "eingeführt" und für die Schüler ist das Besondere, dass sich gleichzeitig drei Geraden in ein und demselben Punkt schneiden, das Normale, Alltägliche und damit eigentlich nicht so sehr Aufregende. Um also hier beim Schüler eine Spannungs- und Erwartungshaltung zu erzeugen, ist es sinnvoll, entsprechende Phänomene und Kontrastbeispiele erfahrbar zu machen. Um die Schüler entsprechend auf die nachfolgenden "besonderen" Phänomene vorzubereiten, eignet sich ein Experiment mit drei (oder mehr) Mikadostäbchen (welche als Modell für drei Geraden dienen): Die Stäbchen werden (gedanklich) ein paar Mal geworfen. Wann wird man davon ausgehen, dass "irgendetwas" mit den Stäbchen nicht stimmt? Welche Konstellation oder Lagebeziehungen wären "komisch"? Seltsame Ausgänge von drei Stäbchen wären sicher, wenn die Stäbchen bei jedem der verschiedenen Würfe jeweils parallel zueinander lägen oder wenn eines immer senkrecht zu zwei anderen zu liegen käme; oder etwa, wenn die Stäbchen ein gleichseitiges Dreieck aufspannen würden. Jedenfalls wäre der normale, unverdächtige Ausgang, dass die drei Geraden ein gemeines Dreieck bilden. Alles andere, das mehrfach aufträte, wäre merkwürdig und würde auf manipulierte (etwa speziell magnetisierte) Stäbchen hindeuten.

Im Geometrieunterricht lernen die Schüler aber ausschließlich derartig "magnetisierte" Geraden (Höhen, Mittelsenkrechte, usw.) kennen. In Anlehnung an das Vorgehen im Physikunterricht wäre es dagegen sinnvoll, vor den "magnetisierten" erst einmal "normale Geraden" kennen zu lernen; konkret in dem hier zu behandelnden Fall also Linien in Dreiecken, die keine besondere Lagebeziehung zueinander einnehmen. Diese Grundidee sollte in einem Unterrichtsversuch in einer 7. Klasse Realschule (vgl. Trunk/Weth 1997) realisiert werden. Die Schüler waren dabei aufgefordert,
selbst (mit dem Computerprogramm Euklid) "zu jeder Seite oder Ecke eines Dreiecks *gleichartige* Linien" zu konstruieren, vor der Konstruktion schriftlich zu beschreiben, was sie als Schnittfigur erwarten,
die Konstruktion am Bildschirm zu variieren und auf "Auffälligkeiten" hin zu untersuchen und schließlich
zu versuchen, evtl. beobachtete Phänomene zu begründen.

Die "Gleichartigkeit" von Dreieckstransversalen wurde den Schülern an einem Beispiel erläutert: Im Lehrerbeispiel wurden in einem Dreieck drei 30°-Winkel mit den Eckpunkten als Scheitel konstruiert (vgl. Abb. 1).

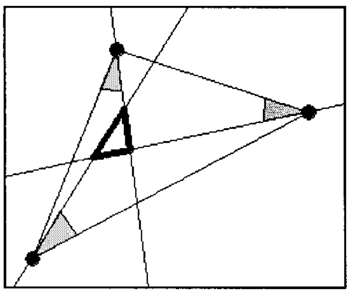

Abb. 1

Die konstruierten Schenkel bildeten die "gleichartigen" Linien. An diesem Beispiel wurde dann demonstriert, dass die drei Linien "normalerweise" ein Dreieck bilden (in Abb. 1 fett gezeichnet), und die Fragen aufgeworfen, ob dieses Schnittdreieck spezielle Winkel besitzt, ob evtl. ein Zusammenhang mit den Eckwinkeln des Ausgangsdreiecks besteht, ob man durch Verziehen der Eckpunkte das Schnittdreieck vielleicht auch einmal ganz verschwinden, also zu einem einzigen Punkt schrumpfen lassen kann usw.

Einige mögliche “Lösungen”, welche die Schüler zu dieser offenen Aufgabenstellung entwickelten, sahen etwa folgendermaßen aus:

Eine Schülergruppe (die Schüler arbeiteten zu zweit an einem Computer) konstruierte von den Seitenmitten des gegebenen Dreiecks als “gleichartige” Linien die “Lote auf die rechte benachbarte Dreiecksseite” (vgl. Abb. 2).

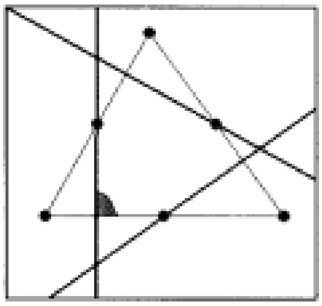

Abb. 2

Als auffälliges Phänomen beobachteten sie, dass die entstandene Schnittfigur immer ein zum Ausgangsdreieck “winkelgleiches” Dreieck[2] bildet. Das wesentliche Hilfsmittel, um die Suche nach Phänomenen überhaupt realisieren zu können, bildete bei dieser Entdeckung die Möglichkeit, die Ausgangskonfiguration variieren – d.h. die Eckpunkte des gegebenen Dreiecks verziehen – und die Beobachtung durch Winkelmessungen zu einer begründeten Hypothese erhärten zu können.

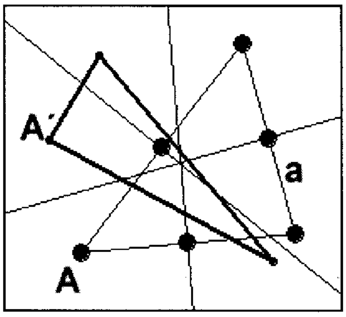

Abb. 3

Besonders schöne Lösungsmöglichkeiten beziehen geometrische Abbildungen in die Konstruktion mit ein. Für Abb. 3 wurde jeder Eckpunkt des gegebenen Dreiecks an “seiner” Mittelsenkrechten gespiegelt; d.h. beispielsweise wurde der Eckpunkt A an der Mittelsenkrechten der Dreiecksseite a abgebildet. Zunächst stellt man beim Variieren der Ausgangskonfiguration keine Besonderheiten fest: die drei Bildpunkte A', B' und C' bilden augenscheinlich ein “ganz gewöhnliches” Dreieck – Zusammenhänge mit dem Ausgangsdreieck sind zunächst keine zu beobachten. Vermutlich motiviert durch die Beispiele, die sie vorher konstruiert und immer etwas “Besonderes” entdeckt hatten, ließen die beiden Schüler in diesem Fall aber “nicht locker”. Trotz des “frustrierenden” Ergebnisses ihrer ersten Experimente bemühten sie sich, einen Zusammenhang zu “erzwingen”. Dabei konstruierten sie u.a. auch den Kreis um den gemeinsamen Schnittpunkt der Mittelsenkrechten durch einen Dreieckspunkt, also den Umkreis des gegebenen Dreiecks. Dass dann A, B und C “automatisch” auf der Kreislinie liegen, war in diesem Stadium nichts wirklich Aufregendes mehr[3].

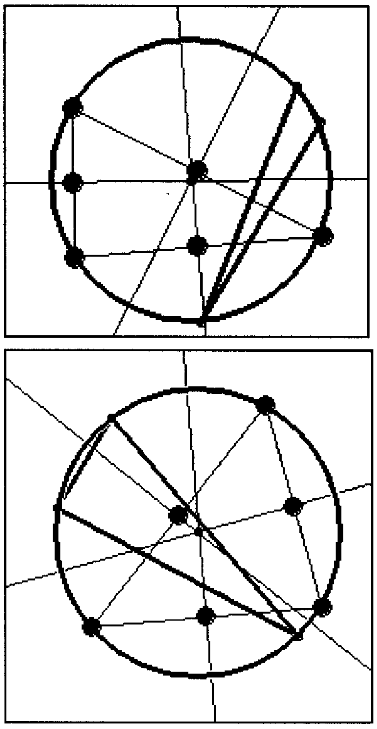

Abb. 4 und 5

Aber merkwürdig und auffallend war die Beobachtung, dass unabhängig von der Form des Ausgangsdreiecks die gespiegelten Bildpunkte A', B' und C' ebenfalls immer auf dem Umkreis des Ausgangsdreiecks liegen.

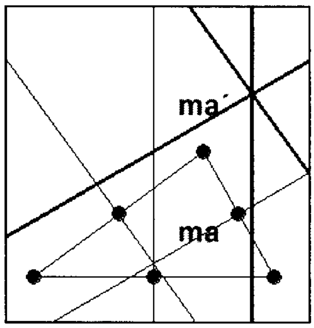

Abb. 6

Eine letzte Konstruktion (vgl. Abb. 6), die hier erwähnt werden soll, verwendet eine ähnliche Idee. Nun werden aber – umgekehrt wie eben – die Mittelsenkrechten an “ihren Eckpunkten” punktgespiegelt; z.B. die Mittelsenkrechte zur Dreiecksseite a wird an “ihrem Eckpunkt” A abgebildet. Insgesamt werden also drei verschiedene Geraden an drei verschiedenen Punkten abgebildet und liefern drei neue Geraden. Erstaunlich ist das Phänomen, das hier zu beobachten ist: die drei gespiegel-

[2]Der Begriff der “Ähnlichkeit” ist in der 7. Jahrgangsstufe noch nicht bekannt.

[3]Die Klasse hatte in ihren eigenen Experimenten bereits alle klassischen merkwürdigen Punkte entdeckt und “forschte” weiter.

ten Geraden schneiden sich immer in einem gemeinsamen Punkt (im Sinne der Einleitung sind sie “magnetisch”).

Die hier angedeuteten Konstruktionsideen für gleichartige Dreickslinien und Dreiecksphänomene bilden nur einen kleinen Ausschnitt in die ca. 20 verschiedenen “Lösungen” der offenen Aufgabenstellung, zeigen aber bereits das Wesentliche, das mit dieser Unterrichtssequenz erreicht werden sollte: Bevor die Schüler den kanonischen Unterrichtsstoff erlernen sollten, sollten sie selbstständig Erfahrungen mit der Thematik sammeln. Wichtig dabei war ausdrücklich nicht, die Beobachtungen auch vollständig zu begründen (was in den vorliegenden Beispielen für einen Lehrer sicher nicht problematisch ist). Vielmehr sollten die Schüler eine Vielfalt von Phänomenen erleben, aus der sich die im Anschluss behandelten klassischen merkwürdigen Dreieckspunkte als besonders einfache und einfach begründbare auszeichnen – und damit das Attribut “merkwürdig” auch wirklich rechtfertigen.

Als methodisch günstig bei einer derartigen “offenen Aufgabenstellung” erweist sich (wie sich z.B. auch beim Themenkreis “geometrische Abbildungen” oder “Hintereinanderausführung von Abbildungen” gezeigt hat) folgendes Vorgehen:

- Mit einem einfachen Beispiel werden die Schüler mit der Zielvorgabe vertraut gemacht. Erfahrungsgemäß ist es zusätzlich notwendig, den Schülern bewusst zu machen, dass es – anders als üblich – bei “offenen Aufgaben” nicht “die” genaue oder richtige Lösung gibt. Vielmehr könnte man von “schönen”, “interessanten”, “langweiligen” oder “komplizierten” Lösungen, Konstruktionen etc. sprechen.
- Wesentlich ist die Verfügbarkeit einer angemessenen Experimentierumgebung – im vorliegenden Fall bildete dies der Computer bzw. das Programm Euklid. In anderen Fällen könnten dies aber auch ein Taschenrechner, ein Computer-Algebra-System, Papier und Schere oder auch nur Papier und Bleistift sein.
- Als günstig erweist sich auch, die Schüler immer wieder anzuhalten, ihre Beobachtungen, Zwischenergebnisse, Vermutungen, Konstruktionsskizzen usw. in einem vorstrukturierten “Forschungstagebuch” zu beschreiben, auf Diskette zu speichern oder in sonstiger Form zu bewahren. Tut man dies nicht, ist es oftmals schwer, den Weg, der zu interessanten Phänomenen geführt hat, zu rekonstruieren.
- Eine mögliche Bewertung bei offenen Aufgabenstellungen bietet sich in Form eines mathematischen Aufsatzes an: Hier sollen die Schüler ähnlich wie in einem Deutschaufsatz in vollständigen Sätzen
  - die gegebene Problemstellung darstellen,
  - mögliche oder vermutliche Phänomene beschreiben,
  - ihre Lösungsideen (evtl. auch unter Einbeziehung von Fehlversuchen und Irrwegen) ausformulieren und
  - Begründungen für die Phänomene angeben.

Offene Aufgabenstellungen als Begleitung eines Themas

Neben dem Begriffsinhalt, also etwa den definierenden Eigenschaften einer Dreieckshöhe oder des Umkreismittelpunkts, ist für ein vollständiges Begriffsverständnis auch die Erforschung des Begriffsumfangs erforderlich. Hier lernen die Schüler Zusammenhänge zu anderen Begriffen, Sonderfälle, Eigenschaften des neuen Begriffs kennen. Überspitzt formuliert dienen hierzu üblicherweise etwa Aufgaben wie: Konstruiere den Umkreismittelpunkt eines spitzwinkligen, eines rechtwinkligen und eines stumpfwinkligen Dreiecks! Bei dieser konvergenten Aufgabenstellung, die mit der Konstruktion “erledigt” ist, findet allerdings kaum eine intellektuelle, forschende Auseinandersetzung mit der Thematik statt. Eine “innere Betroffenheit” stellt sich ein, wenn das Thema als offenes Problem gestellt wird, wenn der Schüler selbst entdecken darf oder muss, dass sich die Lage des Umkreismittelpunktes nach dem Aussehen des Dreiecks klassifizieren lässt.

Geeignete divergente oder offene Aufgabenstellungen, die wieder ein hohes Maß an Verbalisierungen fordert und fördert, wären hier:

- Gibt es Dreiecke, bei denen der Umkreismittelpunkt, der Inkreismittelpunkt, der Höhenschnittpunkt, der Schwerpunkt innerhalb/außerhalb des Dreiecks liegt? Bei welchen Dreiecken liegen die Punkte genau auf einer Dreiecksseite/genau in einem Eckpunkt?
- Gibt es Dreiecke, bei denen die merkwürdigen Linien mit den Dreiecksseiten zusammenfallen?
- Gibt es Dreiecke, in welchen verschiedene merkwürdige Punkte oder Linien zusammenfallen?
- Gibt es Dreiecke, in welchen merkwürdige Punkte bestimmte Lagebeziehungen einnehmen?

Hier eignet sich als unterrichtliche Struktur, dass zunächst die Eigenschaften der einzelnen Linien und Punkte erforscht und später dann Beziehungen zwischen ihnen problematisiert werden. Auch hier sollte den Schülern die Gelegenheit gegeben werden, das Gebiet “auf eigene Faust” zu erkunden. Der Computer liefert dabei das geeignete Instrument, um

- ohne konstruktiven Aufwand beliebig viele Konstellationen “auszutesten”,
- dann Ausgangskonfigurationen zunehmend systematisch zu variieren,
- begründete Vermutungen anzustellen,
- diese anschließend evtl. durch Messungen und neue Konstruktionen zu erhärten,
- um sie endlich verbal auszuformulieren und eine Begründung zu erarbeiten.

Sinnvoll als Einstieg in eine kleine mathematische Forschungsarbeit wäre bei der Behandlung des Höhenschnittpunkts beispielsweise die Aufgabenstellung:

Beschreibe verschiedene Lagen, die der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks einnehmen kann.
Wann stellen sich besondere Lagebeziehungen ein?
Was ist das besondere an den Lagebeziehungen?
Begründe Deine Beobachtungen.

Die nachfolgende Bildsequenz stellt (allerdings unzureichend) eine “Fallunterscheidung” zum Höhenschnittpunkt dar. Sie legt die Vermutung nahe, dass der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks außerhalb und innerhalb des Dreiecks liegen kann, wobei genau in dem Fall, dass das Dreieck rechtwinklig ist, der Höhenschnittpunkt mit einem Eckpunkt zusammenfällt.

Erfahrungsgemäß ist es für Schüler, die erstmalig mit derartigen Phänomenen in Kontakt kommen, keineswegs trivial und selbstverständlich,

- bemerkenswerte Phänomene überhaupt zu erkennen,
- die einzelnen Fälle zu unterscheiden,
- die Beobachtungen angemessen und verbal sicher zu beschreiben und
- eine Begründung zu formulieren.

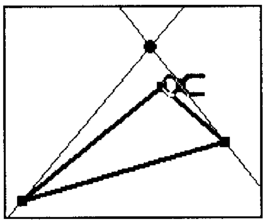

Abb. 7

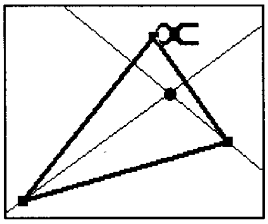

Abb. 8

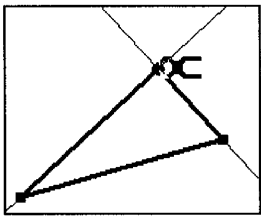

Abb. 9

Eine zum Experimentieren herausfordernde Arbeitsumgebung wie hier z.B. Euklid bringt erfahrungsgemäß Schüler auch zu Ideen und Beobachtungen, die vom Lehrer nicht erwartet und intendiert sind. So tendieren Schüler gerne dahin, Messungen vorzunehmen und Zahlen zu vergleichen. Im vorliegenden Experiment ist damit z.B. zu entdecken, dass die beiden gemessenen Winkel (vgl. Abb. 10, 11) sich immer zu 180° ergänzen.

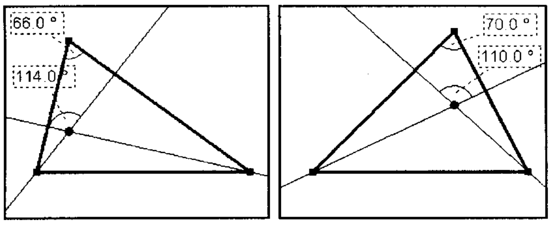

Abb. 10, 11

Offene Aufgabenstellungen als Abschluss eines Themas oder als eigene Projekte

Die bisher vorgestellten Beispiele und Anregungen waren für den konkreten Einsatz im schulischen Unterricht konzipiert und erprobt. Hierzu war vor dem unterrichtlichen Einsatz mit den Lehrkräften versucht worden, den "Erfindungsradius" abzuschätzen und durch die Aufgabenstellung so einzuengen, dass im Wesentlichen abzusehen war, welche Erfindungen den Schülern offen stehen. Insbesondere konnten damit auch im Vorfeld Erfahrungen zum wahrscheinlichen unterrichtlichen Zeitaufwand gewonnen werden. In den obigen Fällen zeigte sich, dass mit den Eigenerfahrungen eine realistische und praktikable Prognose für den Unterricht getroffen werden kann. Allerdings benötigt mathematische Forschung – auch in den "kleinen" schulischen Dimensionen – Zeit, Geduld und Muße und im Allgemeinen sind Zeit-, Erfolgs- und Leistungsdruck bei der kreativen Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen eher kontraproduktiv. Deshalb sollen im Folgenden einige Beispiele angedeutet werden, die sich weniger für den "schnellen" unterrichtlichen Einsatz, sondern eher für ein eigenes mathematisches Projekt, ein selbstständig erarbeitetes Referat oder für eine schriftliche Haus- oder Facharbeit eignen. Die folgenden Probleme lassen sich demnach z.B. als Abschluss einer Unterrichtssequenz oder als Ausblick und Ergänzung der im Unterricht gewonnenen Erkenntnisse verstehen.

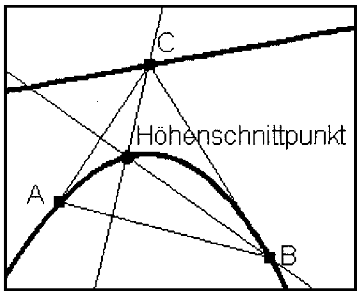

Abb. 12

Beim bisher vornehmlich behandelten Themenkreis "merkwürdige Punkte und Linien im Dreieck" tritt in der Literatur seit Aufkommen von dynamischen Geometriesystemen immer wieder die "Höhenschnittpunktskurve" als ein Beispiel auf, das die Effizienz des Computers in seiner Funktion als Entdecker von Phänomenen unterstreicht (vgl. Schumann 1990/91). Konkret wird hier die Frage behandelt, auf welcher Ortslinie sich der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks bewegt, wenn ein Eckpunkt des Dreiecks längs einer Geraden bewegt wird (vgl. Abb. 12). Wie sich – unter Anwendung algebraischer Berechnungen – zeigen lässt (vgl. Meyer 1997), bildet die Kurve eine Parabel. Eine erste naheliegende Erweiterung ist zunächst die Frage nach den Ortslinien, welche sich ergeben, wenn man den "beweglichen Eckpunkt" nicht auf einer Geraden, sondern etwa auf einem Kreis oder auf einem Kegelschnitt – speziell: selbst auf einer Parabel – bewegt. In Abb. 13 ist *eine* mögliche Kurve dargestellt, die sich ergibt, wenn C längs der (gestrichelt gezeichneten) Parabel bewegt. Wie Experimente zeigen, entstehen je nach Lage der Parabel bzgl. der Strecke AB verschiedenste Kurven, die teilweise aus mehreren disjunkten Ästen bestehen und deren Aussehen in bestimmten Konstellationen an Hyperbeln erinnert[4].

Eine weitere naheliegende Modifikation der ursprünglichen Aufgabenstellung ist die Frage, welche Ortslinien die

[4]Eine mathematische Durchdringung des Problems bleibe dem Leser überlassen.

anderen merkwürdigen Punkte des Dreiecks durchlaufen, wenn ein Eckpunkt längs einer Geraden, einer Kreislinie usw. bewegt wird. Auch hier ergeben sich Phänomene, die mit schulischen Methoden behandelt werden können.

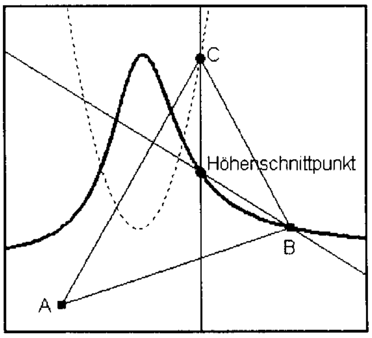

Abb. 13

Ein großer Bereich offener Aufgabenstellungen erschließt sich nun bei einer Modifikation, welche im folgenden näher beschrieben werden soll: Um den Höhenschnittpunkt im Dreieck zu erhalten, genügt es, zwei Höhen zu schneiden. Für die anderen merkwürdigen Punkte benötigt man zwei Mittelsenkrechten oder zwei Seitenhalbierende oder zwei Winkelhalbierende.
Jeweils werden zwei "gleichartige" Transversalen zum Schnitt gebracht. Was passiert nun aber, wenn man nicht zwei gleichartige, sondern verschiedenartige Linien zum Schnitt bringt, also etwa eine Höhe mit einer Winkelhalbierenden schneidet und dann untersucht, auf welcher Ortslinie sich der Schnittpunkt bewegt?

Diese Problemstellung zerfällt zunächst grob in zwei Teilbereiche, denn prinzipiell ist zu unterscheiden, ob eine der beiden Schnittgeraden durch den bewegten Eckpunkt des Dreiecks verläuft oder nicht. Um zunächst zu demonstrieren, dass diese Unterscheidung zu verschiedenen Phänomenen führt, soll die Ortslinie des Schnittpunkts einer Seitenhalbierenden (durch den Eckpunkt A) und einer Höhe betrachtet werden.

In den Abbildungen 14 und 15 wird die Seitenhalbierende durch den Eckpunkt A gezeichnet und mit einer Dreieckshöhe geschnitten: im linken Bild mit der Höhe durch den "bewegten" Punkt C, im rechten Bild durch den "festen" Punkt B – in beiden Bildern wird C auf der Parallelen zur Dreiecksseite AB bewegt. Die entstehenden Ortslinien sind zunächst offensichtlich völlig verschieden voneinander und scheinen im einen Fall an einen Hyperbelast, im anderen an eine Ellipse zu erinnern. Ohne hier C nicht auf einer Parallelen zur Dreiecksseite AB, sondern auf einer nicht so speziellen Geraden bewegt wird. Eine natürliche Erweiterung ergibt sich, wenn man C statt an eine Gerade an einen Kreis oder einen Kegelschnitt "bindet".

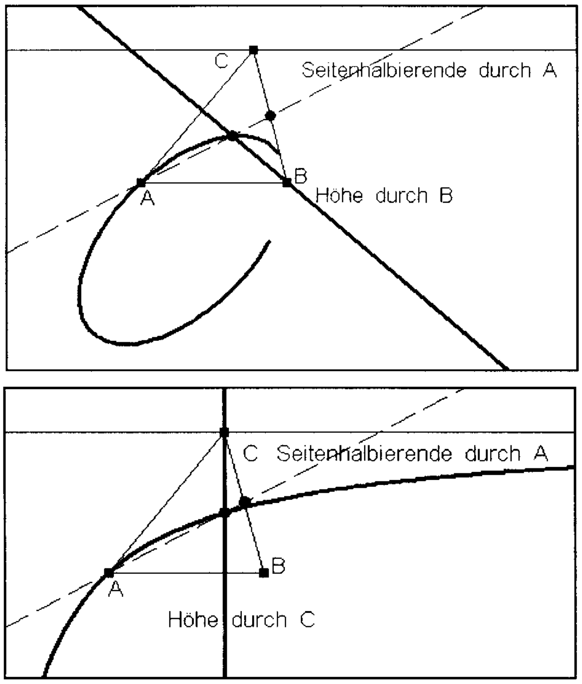

Abb. 14, 15

Ein offenes Problem stellt auch die "Umkehrung" der Fragestellung dar: Wie muss C bewegt werden, damit der betrachtete Schnittpunkt sich auf einer Geraden (einer Strecke, einem Kreis, ...) bewegt? Ist das überhaupt möglich, C so zu bewegen? Ohne diese Fragen zu klären sei darauf hingewiesen, dass Computerexperimente erfahrungsgemäß eine wesentliche Hilfe darstellen und Lösungsideen liefern, welche eine algebraische Bearbeitung (mit einem Computerprogramm wie etwa Derive) vorbereiten und unterstützen.

Dieselben Fragestellungen ergeben sich, wenn man das offene Problem untersucht: Gegeben sei wie oben ein Dreieck ABC. Welche Kurven ergeben sich beim Bewegen von C auf einer Geraden, einem Kreis, ... , wenn man den Schnittpunkt zweier spezieller Ecktransversalen durch A und B betrachtet?

Der Tabelle 1 lassen sich die Möglichkeiten entnehmen, welche sich durch die Aufgabenstellung anbieten.

Linien durch die Eckpunkte A und B	**Seitenhalbierende**	**Höhe**	**Mittelsenkrechte**	**Winkelhalbierende**
	Ortslinie des Schwerpunkts			
Höhe		**Ortslinie des Höhenschnittpunkts**		
Mittelsenkrechte			**Ortslinie des Umkreismittelpunkts**	
Winkelhalbierende				**Ortslinie des Inkreismittelpunkts**

Tabelle 1

auf die Verifikation dieser Vermutungen einzugehen, sei zunächst die Tragweite dieser offenen Problemstellung diskutiert: Wie oben auch lassen sich in beiden Fällen nun spezielle Kurven untersuchen, die sich ergeben, wenn

Ganz analoge Kombinationsmöglichkeiten ergeben sich zusätzlich, wenn man eine der beiden Ecktransversalen durch den bewegten Punkt C betrachtet, während die zweite durch einen der beiden "festen" Eckpunkte A

oder B verläuft[5]. Im Folgenden seien ohne algebraische Begründungen (diese finden sich in Weth 1998) zwei Kombinationen grafisch dargestellt, die zu unerwarteten Phänomenen führen. Zunächst wird die Kurve betrachtet, welche sich beim Bewegen von C ergibt, wenn man den Schnittpunkt von Seitenhalbierender durch C und Winkelhalbierender durch B[6] betrachtet:

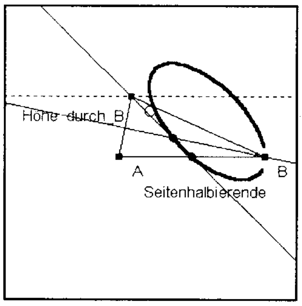

Abb. 16

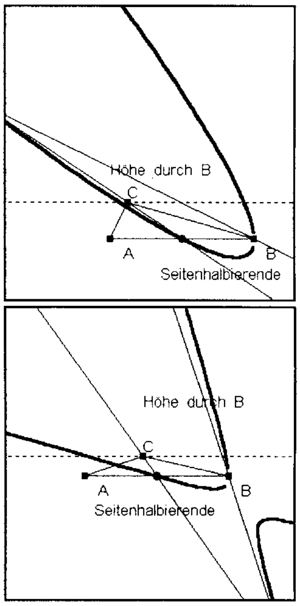

Abb. 17, 18

Wie die Betrachtungen am Bildschirm nahelegen und wie sich zeigen lässt, handelt es sich je nach Abstand der "C-Geraden" von der Dreiecksseite AB um Ellipsen (Kreise), Parabeln oder Hyperbeln, auf denen sich der Schnittpunkt von Seitenhalbierender und Winkelhalbierender bewegt. Dieselben Kurventypen erhält man als Ortslinie des Schnittpunkts einer Seitenhalbierenden durch C und einer Höhe durch B (oder A); C wird dabei wieder auf einer Parallelen zu AB bewegt (vgl.: Abb. 19, 20, 21).

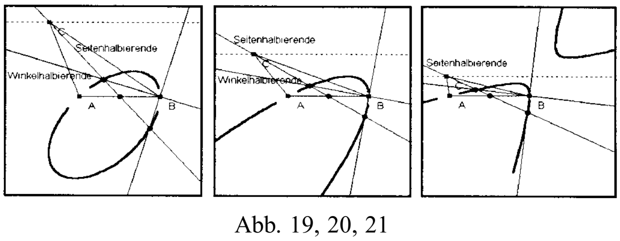

Abb. 19, 20, 21

[5]Entsprechendes gilt für die zu den jeweiligen Eckpunkten "gehörigen" Mittelsenkrechten.

[6]Um die "kompletten" Kurven zu erhalten erweist es sich als günstig, bei Innenwinkelhalbierenden auch gleichzeitig die zugehörige Aussenwinkelhalbierende zu betrachten.

Auf eine ganz erstaunliche Entdeckung sei hier noch etwas näher eingegangen: In allen betrachteten Versuchen hat man selbstverständlich erwartet, dass das Aussehen der Ortsline abhängig ist von der Linie, auf welcher der Eckpunkt C bewegt wird. So ergeben sich z.B. im Falle der obigen Beispiele je nach Abstand der "C-Geraden" von der Seite AB Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln. Um so merkwürdiger ist das "Benehmen" des Schnittpunkts einer Höhe (etwa durch A) und einer Winkelhalbierenden (dann durch B). Der Leser überlege sich, vor dem Weiterlesen, ob er vorhersehen kann, wie die entstehende Ortslinie von der Lage der "C-Geraden" abhängig sein könnte. Die Abbildungen 22 und 23 zeigen, was man nun überraschenderweise im Computerexperiment beobachten kann.

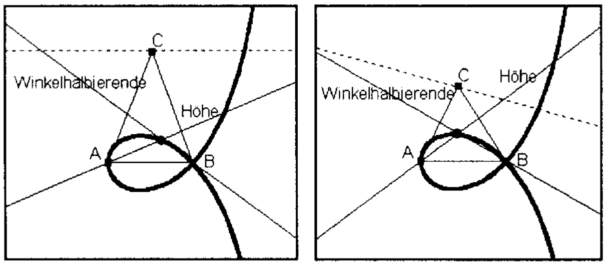

Abb. 22, 23

Das Aussehen der Ortslinie des Schnittpunkts der Winkelhalbierenden und der Höhe scheint unabhängig davon zu sein, auf welcher Geraden (in der Abb. 24 gestrichelt gezeichnet) der Punkt C bewegt wird.

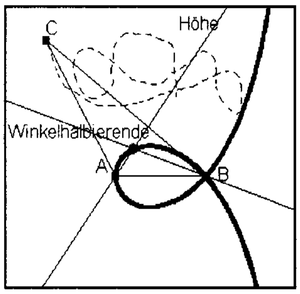

Abb. 24

Im folgenden Experiment wird diese Vermutung augenscheinlich bestätigt; in Abb. 24 wird C längs einer völlig beliebigen Kurve bewegt und trotzdem bewegt sich der Schnittpunkt aus Höhe und Winkelhalbierenden wie in den obigen Bildern absolut stabil auf "seiner" Kurve[7]. Diese Kurve ist demnach eine geometrische Invariante der vorliegenden Konstruktion. Die Begründung dieses Phänomens gelingt, wenn man sich die Dreiecksseite BC verlängert vorstellt und C längs dieser Geraden bewegt: Dann ändert sich die Lage der Höhe durch A nicht, da sie nach wie vor senkrecht zur Geraden BC ist. Und ebenso bleibt die Winkelhalbierende durch B unverändert, da AB und die gesamte Gerade BC ihre Lage nicht ändern. Mit anderen Worten: die gesamte Gerade BC wird auf einen einzigen Punkt abgebildet. Der Schnittpunkt von Winkelhalbierender und Höhe hängt also letztlich nur von dem

[7]Beim Durchlaufen der gestrichelten Ortsline mit C wird nur ein Teil der (fett gezeichneten) Ortslinie des Schnittpunkts aus Winkelhalbierender und Höhe durchlaufen.

Dreieckswinkel bei B ab. Neben der erstaunlichen Entdeckung ist ebenso erstaunlich, dass sich das Phänomen so einfach begründen lässt.

Exemplarisch für die obigen Kurven sei hier noch angedeutet, wie man sich Klarheit über die Identifizierung der erzeugten Ortslinie verschafft. Hierzu legt man zunächst ein Koordinatensystem (günstigerweise so, dass $A(-1;0)$ und $B(0;0)$) fest. Der Punkt C habe die allgemeine Darstellung $C(x_C;y_C)$. Damit erhält die Höhe, die durch A verläuft die vektorielle Darstellung:

$$h:\vec{x}=\vec{a}+\tau\begin{pmatrix}-y_C\\ x_C\end{pmatrix}$$

Und für die Winkelhalbierende durch B gilt:

$$w:\vec{x}=\vec{b}+\lambda\left(\vec{a}^0+\vec{c}^0\right)=\lambda\left(\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}+\frac{\binom{x_C}{y_C}}{\sqrt{{x_C}^2+{y_C}^2}}\right)$$

Aus diesen Parameterdarstellungen errechnet man die Schnittpunktkoordinaten der Winkelhalbierenden und der Höhe:

$$S\left(\frac{x_C}{\sqrt{{x_C}^2+{y_C}^2}},\ \frac{x_C\left(\sqrt{{x_C}^2+{y_C}^2}+x_C\right)}{y_C\sqrt{{x_C}^2+{y_C}^2}}\right).$$

Diese Darstellung kann nun als "Parameterdarstellung" der Schnittpunktskurve interpretiert werden, die sich ergibt, wenn $C(x_C;y_C)$ irgendeine Bahn durchläuft. Ziel der folgenden Rechnungen ist nun, aus dieser Parameterdarstellung einen Zusammenhang zwischen x und y, also eine algebraische Gleichung der Form $F(x,y)=0$ zu gewinnen, die als "Fingerabdruck" einer Kurve dient; anhand algebraischer Gleichungen können Kurven eindeutig identifiziert werden – ähnlich, wie man Parabeln (in der Schule) anhand der charakteristischen Gleichung $y=ax^2+bx+c$ erkennt.

Im vorliegenden Fall gelingt dies, indem man x und y, die Kurvenpunktkoordinaten, zunächst durch die Polarkoordinaten von C darstellt. Mit $r=\sqrt{{x_C}^2+{y_C}^2}$ und $\tan(\varphi)=\frac{y_C}{x_C}$ erhält man

$$S\left(\cos(\varphi),\ -\frac{{x_C}^2}{y_C|r|}-\cot(\varphi)\right),$$

die Koordinaten des Schittpunkts in Abhängigkeit der Polarkoordinaten von $C(r,\varphi)$.
Beachtet man nun noch, dass

$$\frac{x_C}{r}=\cos(\varphi)\quad\text{und}\quad\frac{x_C}{y_C}=\tan(\varphi),$$

erhält man für die Schnittpunktskoordinaten x und y:

$$S(\cos(\varphi),-\cot(\varphi)(\cos(\varphi)+1)),$$

also eine Parameterdarstellung, die überraschenderweise nur noch von φ abhängt. Aus den Gleichungen

$$x=\cos(\varphi)\text{ und}$$
$$y=-\cot(\varphi)(\cos(\varphi)+1)$$

lässt sich nun φ eliminieren und man erhält als algebraische Beziehung zwischen den x- und y- Koordinaten der Kurvenpunkte des Schnittpunkts:

$$x^2(x+1)+y^2(x-1)=0.$$

Damit ist die "stabile" Schnittpunktskurve als Strophoide identifiziert. Diese Kurve wurde ursprünglich von Pascal, dem Vater des berühmten Blaise Pascal, erfunden und hatte eine Bedeutung als "Prüfstein" in den Kindertagen der Analysis (vgl. Schmidt 1949, Weth 1994).

Zusammenfassung

Der vorliegende Beitrag wollte an einem engen Themenkreis, den merkwürdigen Punkten und Linien des Dreiecks, aufzeigen, dass auch etablierte und vielfach behandelte Aufgabenstellungen immer wieder Gelegenheiten bieten, die übliche Sichtweise zu erweitern. Die offenen Problemstellungen lassen sich auf verschiedene Weise in den laufenden Unterricht integrieren. Wie gezeigt (und erprobt wurde), können sie zur Vorbereitung auf ein neues Stoffgebiet, als begleitende Ergänzung des laufenden Unterrichts oder als Abschluss einer Unterrichtssequenz und schliesslich auch als eigenes "Projekt" dienen. Die Unabsehbarkeit der potentiellen Schülererfindungen lässt sich erfahrungsgemäß durch eigene Beschäftigung mit dem Problem im Vorfeld einschränken. Trotzdem bleibt ein – im Vergleich zu herkömmlichen konvergenten Aufgaben – hohes Mass an unerwarteten Phänomenen. Damit ändert sich die Rolle des Lehrers: er wird aus seiner oftmals "allwissenden" Position selbst zu einem "Unwissenden", der neuen Phänomenen begegnet und sich i. Allg. nicht sicher sein kann, diese schnell und sicher zu übersehen. Aber genau das macht – auch für Lehrer – einen Teil des Reizes offener Aufgabenstellungen aus: immer besteht die Chance Neues, Unbekanntes zu entdecken, das für Schüler und Lehrer gleichermaßen eine intellektuelle Herausforderung darstellt. Ein fast unverzichtbares Hilfsmittel bei diesen Experimenten und Entdeckungen ist der Computer. Die Möglichkeit, funktionales Denken, das "Was-passiert-Wenn" experimentell durchzuführen und mit der Computermaus in der Hand regelrecht zu be*greifen*, dabei bereits visuell Fälle zu unterscheiden, Lagebeziehungen zu untersuchen, Vermutungen zu bilden, ist ein echter Fortschritt für den Unterricht. Sie sollten ihn – auch in Ihrem Unterricht – nutzen.

Literatur

Barth, F. et al. (1989): Anschauliche Geometrie 2. – München: Ehrenwirth

Ludwig, M. (1998): Projekte im Mathematikunterricht des Gymnasiums. – Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Meyer, J. (1997): Bahnkurven als geometrische Objekte. – In: Hischer, H. (Hrsg.), Computer und Geometrie – Neue Chancen für den Geometrieunterricht. Hildesheim: Franzbecker. S. 90–95

Schmidt, H. (1949): Ausgewählte höhere Kurven. – Wiesbaden: Kesselring

Schumann, H. (1990/91: Geometrie im Zugmodus, Teil 1 und 2. – In: Didaktik der Mathematik 18 (1990) H. 4, S. 290–303 und Didaktik der Mathematik 19 (1991) H. 1, S. 50–78

Trunk, C.; Weth, Th. (1997): Kreativer Geometrieunterricht – ein Unterrichtsversuch zu merkwürdigen Punkten und Linien im Dreieck, Teil 1 und 2. – In: Mathematik in der Schule 37 (1999) 3 u. 4, S. 160–166 u. S. 216–223

Weth, Th. (1994): Die Strophoide. A lexicon of curves (3). – In: Derive-News-Letters #13, S. 10–12
Weth, Th. (1997): Kreative Zugänge zum Kurvenbegriff. – In: Der Mathematikunderricht 4/5 (1998), S. 38–60

Autor
Weth, Thomas, Prof. Dr., Universität Erlangen-Nürnberg, Didaktik der Mathematik, Regensburger Str. 160, D-90478 Nürnberg.
E-mail: tsweth@ewf.uni-erlangen.de

Vorschau auf Analysethemen der nächsten Hefte

Für die Analysen der Jahrgänge 33 (2001) bis 34 (2002) sind folgende Themen geplant:
– Ethnomathematik
– Mathematik an Hochschulen lehren und lernen
– Analysis an Hochschulen
– Mathematik in der Ingenieurausbildung
– Theoretische Betrachtungen zu Schulbuchanalysen.

Vorschläge für Beiträge zu o.g. Themen erbitten wir an die Schriftleitung.

Outlook on Future Topics

The following subjects are intended for the analysis sections of Vol. 33 (2001) to Vol. 34 (2002):
– Ethnomathematics
– Teaching and learning mathematics at university level
– Calculus at universities
– Mathematics and engineering education
– Concepts and issues in textbook analyses.

Suggestions for contributions to these subjects are welcome and should be addressed to the editor.