Zech, Friedrich:

Mathematik erklären und verstehen
Eine Methodik des Mathematikunterrichts mit besonderer Berücksichtigung von lernschwachen Schülern und Alltagsnähe

Berlin: Cornelsen, 1995. - 312 S.
ISBN 3-464-59171-9

Wolfgang Schulz, Berlin

Das Buch ist das Ergebnis eines über 12 Jahre laufenden Projekts über **Te**xtliche **Le**rnhilfen des **Ma**thematikunterrichts (TELEMA), insbesondere lernschwacher Schüler der Sekundarstufe I, das der Autor gemeinsam mit M. Wellenreuther durchgeführt hat. Dabei sind auch Materialien für den Mathematikunterricht der Schuljahre 5 bis 8 entwickelt worden, die in der Reihe "Stützpfeiler Mathematik" bei Cornelsen erschienen sind.

Das Buch gliedert sich in zwei Teile. Die angestrebten Ziele in beiden Teilen kann man dem Vorwort auf Seite 13 entnehmen: "Es soll im ersten Teil ein *allgemeines Unterrichtskonzept für 'verständnisorientierten' Mathematikunterricht* (zur Vermittlung von Basiswissen, insbesondere lernschwacher Schüler) entwickelt werden, das an Beispielen aus dem Projekt verdeutlicht wird. Der *zweite* Teil wendet sich der *Vermittlung von speziellen Inhalten einer Schulstufe* zu (Klasse 5 bis 8, besonders Hauptschul-, teilweise Realschulniveau)."

Die im ersten Teil erarbeiteten theoretischen Positionen werden im zweiten Teil für einige wichtige Themen des Mathematikunterrichts praktisch umgesetzt. Dabei findet der Leser auch immer wieder Hinweise zum beabsichtigten Umgang mit den für die Schüler bestimmten Materialien der Reihe "Stützpfeiler Mathematik".

Der erste Teil "I. Allgemeine didaktische Schwerpunkte" ist untergliedert in

1 Mathematikunterricht für lernschwache Schüler
2 Allgemeine Unterrichtskonzeption des Projekts TELEMA bzw. der Reihe STÜTZPFEILER
3 Die einzelnen Elemente der Unterrichtskonzeption
4 Das Zusammenspiel von Lehrer, Lehrtext und Schüler.

Der zweite Teil "II. Gestaltung der einzelnen Unterrichtsinhalte" enthält Ausführungen zu

5 Geometrie im 5./6.Schuljahr
6 Bruchrechnung
7 Prozent- und Zinsrechnung
8 Schlußrechnung.

Abschließend werden "Folgerungen für den Mathematikunterricht und die mathematikdidaktische Lehre und Forschung" formuliert.

In dem Buch bekräftigt der Autor immer wieder seine Position, daß er einen stärker verständnis- und anwendungsorientierten und weniger einen formalen Mathematikunterricht anstrebt. Die vorgestellte Konzeption setzt insbesondere bei der Vermittlung von Grundkenntnissen stark auf einen Unterricht, der auf der Grundlage von und mit gut strukturierten und verständlichen, schülerorientierten Lehrtexten arbeitet.

Im 1. Kapitel spricht sich der Autor gegen einen Mathematikunterricht für lernschwache Schüler aus, der durch Kleinschrittigkeit und mechanisches Üben gekennzeichnet ist, denn ein solcher Unterricht überwindet nicht die mangelnde Begriffsbildung und ist nicht geeignet, Verständnis zu erzeugen.

Die Verständlichkeit von Erklärungen spielt im 2. Kapitel eine zentrale Rolle, denn durch sie soll (in Texten und durch den Lehrer) Verständnis des Schülers erzeugt werden. Der Autor führt dazu aus: "*Damit der Begriff für den Schüler gut 'faßbar' wird, muß er auf eine für ihn möglichst konkrete, mit Alltagserfahrungen durchsetzte Ebene gebracht werden.* Dies ist der didaktisch wichtigste Schritt, der bei einer zu starken Orientierung an der Mathematik alleine leicht vergessen wird. Die mathematische Definition muß umgesetzt werden in eine 'schülergemäße Formulierung' ... (Seiten 27/28). Die Transformation des mathematischen Inhalts auf die genannte Ebene wird als der mathematikdidaktische Kern bezeichnet. Der Bezug auf diesen mathematikdidaktischen Kern ist eine wesentliche Position, die in dem Buch vertreten wird. Der Anspruch wird dann am Beispiel des Erweiterns von Brüchen verdeutlicht. "Erweitern heißt, den Bruchteil z.B. eines Kuchens in mehr, aber entsprechend kleinere Teile zu zerlegen" (Seite 28). Diese Formulierung ist offensichtlich nicht als eine Zwischenstation auf dem Weg zu einer Definition gedacht, sondern als abschließende Erklärung für das Erweitern von Brüchen. Im Heft Bruchrechnung 1 der Reihe "Stützpfeiler Mathematik" findet man auf Seite 22, hervorgehoben durch den Hinweis "Merke": "*Erweitern* bedeutet soviel wie 'Verfeinern' einer Einteilung: *Du bekommst mehr, aber entsprechend kleinere Teile.* Bei $\frac{2}{4}$ bekommst du z.B. doppelt so viele Stücke wie bei $\frac{1}{2}$, die Stücke sind aber nur halb so groß." Auf Seite 24 des Heftes wird als Regel für das Erweitern formuliert: "*Du erweiterst einen Bruch, indem du Zähler und Nenner mit der gleichen Zahl malnimmst.*" Damit wird deutlich, daß eine mathematische Definition für das Erweitern von Brüchen nicht angestrebt wird. So erscheint die erklärte Absicht: "Die erste Erklärung eines mathematischen Begriffs oder Verfahrens ist nichts anderes als die Ausdifferenzierung eines didaktischen Kerns, der in gleicher Weise die kognitive Struktur des Lesers/Lerners und die Fachstruktur berücksichtigt" (Seite 75) nicht umgesetzt, denn die Fachstruktur wird vernachlässigt. Die Idee des mathematikdidaktischen Kerns hat viele Berührungspunkte zu den "Kernideen" bei Gallin/Ruf, Sprache und Mathematik in der Schule, Verlag Lehrerinnen und Lehrer Schweiz, 1990, Seite 88 ff. Die Kernideen bilden ebenfalls den Auftakt eines Lernprozesses. Allerdings wird dem Lehrer im weiteren Verlauf nicht eine so dominierende Rolle eingeräumt, wie in dem von Zech vertretenen Konzept.

Im 3. Kapitel werden die Elemente der Unterrichtskonzeption genauer vorgestellt. Es handelt sich dabei um Gesichtspunkte zur Sprachgestaltung, Motivation, Strukturierung und Differenzierung. Es geht um die Verwendung von Beispielen, Veranschaulichungen und Zusammenfassungen und die Rolle von Übungen, Wiederholungen und Anwendungen. Es wird zwar immer wieder auf Besonderheiten lernschwacher Schüler eingegangen, so z.B. wenn bei der Motivation die Stärkung des Selbstkonzeptes betont oder die Notwendigkeit einer stärkeren Vororientierung erläutert wird bzw. auf die Rolle von Zwischenzusammenfassungen hingewiesen wird. Dies bedeutet aber nicht, daß die Überlegungen nur für den Unterricht mit lernschwachen Schülern von Bedeutung sind. Viele der hier diskutierten Vorschläge können auch zur Verbesserung der Qualität eines Mathematikunterrichts mit Schülern, die nicht lernschwach sind, beitragen. So wird z.B. für das Üben vorgeschlagen, nicht immer auf der erreichten formalen Ebene zu verbleiben, sondern bei Bedarf auch wieder alte Konkretisierungen anzusprechen (Seite 79), oder auf die Bedeutung von Überschlägen für das Verständnis hingewiesen (Seite 83). Bezüglich der Sprachgestaltung werden auf Seite 37 zwei einleuchtende Faustregeln für die Verständlichkeit formuliert: "1. Verwende möglichst häufige, gebräuchliche Worte und eine möglichst bildhafte, anschauliche Sprache! 2. Vermeide seltene, ungebräuchliche Worte und unnötige Fremdworte und Fachtermini." Problematisch dagegen ist die auf Seite 39 vertretene Position: "Es wird die These vertreten, daß man im Mathematikunterricht (insbesondere lernschwacher Schüler) mit viel weniger Fachterminologie auskommt und viele mathematische Inhalte wahrscheinlich mit anschaulicher Umgangssprache sowie vertrauten mathematischen Begriffen sachadäquater übermittelt werden können." Verzichtet man auf Fachtermini, so fehlen oft klare Begriffsfestlegungen und damit notwendige Abstraktionen, die auf mathematische Definitionen führen. So wird z.B. im Heft "Bruchrechnung 1" nicht erklärt, was ein Bruchteil, der Wert eines Bruches oder eine Bruchzahl ist.

Die vielen Anregungen zum Arbeiten mit Beispielen schließen mit dem Fazit auf Seite 53: "*Es kommt vielmehr auf das gute Erläutern von wenigen Beispielen und die bewußt geförderte Verallgemeinerung durch die Versprachlichung eines allgemeinen Grundgedankens an.*" Dem ist natürlich zuzustimmen, aber wie soll das realisiert werden, wenn für einen Begriff wie z.B. das Erweitern eines Bruches eine Definition gar nicht angestrebt wird?

Eine wichtige Möglichkeit zur Verringerung der Schwierigkeiten lernschwächerer Schüler im Mathematikunterricht wird in der stärkeren inneren Differenzierung des Stoffes gesehen. Der Autor führt aus, daß das Allen-Alles-Anbieten-Wollen die eigentliche Gefahr für den lernschwächeren Schüler darstellt (Seite 92). Die Kürzungsvorschläge fallen radikal aus. "Zum Beispiel könnte auf das Rechnen mit gemeinen Brüchen ... für lernschwächere Schüler des Hauptschulniveaus verzichtet werden" (Seite 93). "Es erscheint ... nicht gerechtfertigt, alle Schüler mit allen Typen von Aufgaben der Prozent- und Zinsrechnung zu konfrontieren" (Seite 89). Es wird eine Reduzierung auf die Berechnung von Prozentwerten vorgeschlagen. Bei der Schlußrechnung werden nur Situationen behandelt, die auf der direkten Proportionalität basieren.

Das 4. Kapitel enthält Erläuterungen, wie der Lernprozeß durch die Lehrerin bzw. den Lehrer unter Einbeziehung von Lehrtexten organisiert werden soll. Eine wesentliche Rolle wird dabei dem kognitiven Modellieren zugesprochen. Darunter wird verstanden, daß die Lehrperson eine Aufgabe vorrechnet und das jeweilige Vorgehen begründet.

Die im 5. Kapitel erläuterte Konzeption eines anwendungsorientierten Geometrieunterrichts ist nicht in erster Linie an einer Fachsystematik ausgerichtet, sondern an stark alltagsnahen Qualifikationen. Das birgt natürlich die Tendenz in sich, daß die Mathematik auf ihre Nützlichkeit für die Bewältigung von Alltagssituationen reduziert wird und innermathematische Denk- und Arbeitsweisen vernachlässigt werden. Für die Bildung mathematischer Begriffe ergibt sich in der Tat ein Defizit, denn bei der Erklärung zum Begriff "Rechteck" wird Bezug auf eine Postkarte genommen und eine mathematische Definition des Begriffs nicht angestrebt. Die Konzeption für den Geometrieunterricht wird beispielhaft im Zusammenhang mit einem Wohnungsgrundriß diskutiert. Ausführungen zu Flächen- und Raummaßen bilden den Abschluß des Kapitels.

Das 6. Kapitel widmet sich der Bruchrechnung. Als Orientierungspunkte für die Überwindung der Schwierigkeiten mit der Bruchrechnung werden gewählt: 1. Eine starke Konzentration der Bruchrechnung auf das, was die Schüler in Alltag und Schule tatsächlich brauchen. 2. Eine wesentlich stärkere Betonung der Verständnisgrundlage (Seite 140). Das hat insbesondere zur Folge, daß die Dezimalbrüche stärker als die gemeinen Brüche betont werden und das Rechnen mit gemeinen Brüchen für lernschwache Schüler weitgehend ausgeblendet wird.

Um Verständnis zu erreichen, werden eine Vielzahl von Situationen und Aufgabentypen unterschieden. So sollen z.B. drei "Bruchsituationen" herausgearbeitet werden: 1. Bruchteile eines Ganzen, 2. Bruchteil als Teil mehrerer Ganzer und 3. Bruchteil als Anteil, und bei der Multiplikation sind die Situationen "Bruchzahl mal natürliche Zahl" und "natürliche Zahl mal Bruchzahl" zu unterscheiden. Die Vielzahl der auftretenden Fälle birgt natürlich die Gefahr der im 1. Kapitel kritisierten Kleinschrittigkeit in sich. Die Unterscheidung der einzelnen Fälle ist sicherlich nicht einfach. Der Autor ist sich dieser Situation bewußt (siehe Fußnote auf Seite 182). Er versucht diesen Einwand mit dem Hinweis darauf zu entkräften, daß man nicht für jeden "selbstverständlichen" Fall eine Regel braucht.

Für das vom Autor vertretene Konzept im Umgang mit Dezimalbrüchen ist die Umwandlung von gemeinen Brüchen in Dezimalbrüche von Bedeutung. So kann das Rechnen mit gemeinen Brüchen weitgehend vermieden werden. Das ist aber nicht unproblematisch, denn es treten schon sehr früh periodische Dezimalzahlen auf.

In der Reihe "Stützpfeiler Mathematik" sind 4 Hefte zur Bruchrechnung erschienen. Eine Evaluation ausgewählter Teile findet man in Zech/Wellenreuther, Journal für Mathematikdidaktik 13(1992), Heft 2/3, S. 143-198.

Im 7. Kapitel werden die Prozent- und die Zinsrechnung als wichtige spezielle Anwendungsgebiete der Bruchrechnung diskutiert. Ihre Behandlung im Mathematikunterricht wird vor allem durch die Verwendung im Alltag gerechtfertigt. Dadurch sollte nach Auffassung des Autors auch wesentlich die Vorgehensweise bestimmt sein. Nach der Grundlegung des Verständnisses für den Prozentbegriff werden zunächst Prozentwerte, später Prozentsätze und schließlich Grundwerte berechnet. Als Minimalziel wird formuliert: "Für die schwächsten Schüler muß und kann es vielleicht genügen, Prozentangaben zu verstehen, d.h. insbesondere auch, sie runden und in einfache Bruchteile übersetzen können ... und Prozentwerte berechnen können ..." (Seite 225). Für die Zinsrechnung ergibt sich entsprechend eine Reduzierung auf die Berechnung von Zinsen und die stärkere Berücksichtigung einiger Spar- und Kreditformen.

Im 8. Kapitel wird die Schlußrechnung thematisiert und (auch im entsprechenden Heft der Reihe "Stützpfeiler Mathematik") auf den Fall der direkten Proportionalität reduziert. Damit kann die irrige Vorstellung unterstützt werden, daß alle funktionalen Zusammenhänge diesem Grundmuster genügen. Außerdem besteht so keine Notwendigkeit, sich davon zu überzeugen, daß in der jeweiligen Situation die behandelte Variante der Schlußrechnung zu einem sinnvollen Ergebnis führt.

Mathematisch problematisch ist es, die Eigenschaft "Dem n-fachen entspricht das n-fache" zur grundlegenden Eigenschaft der direkten Proportionalität zu erklären (Seite 267), denn es gibt Funktionen, die keine direkten Proportionalitäten sind und die diese Eigenschaft haben (siehe dazu Ilse in Mathematik in der Schule, 9(1971), Heft 1, S. 16-37). Daß solche Funktionen nicht Gegenstand des Mathematikunterrichts der Klassenstufen 5 bis 8 sind, kann diesen Einwand nicht entkräften.

Unter der Überschrift "Der Verzicht auf übertriebene mathematische Begrifflichkeit" wird auf Seite 269 ausgeführt, daß bei der Behandlung der Schlußrechnung auf die Begriffe "proportional" und "antiproportional" genauso verzichtet werden kann wie auf den Funktionsbegriff. Diese Auffassung unterscheidet sich grundlegend von der Position, die Vollrath in Mathematik in der Schule, 31(1993), Heft 4, S. 209-221 einnimmt. Dort heißt es: "Dreisatzaufgaben kann man sinnvoll nur noch als Aufgaben zu proportionalen und umgekehrt proportionalen Funktionen behandeln" (Seite 209). Wenn die indirekte Proportionalität im Zusammenhang mit der Schlußrechnung nicht thematisiert wird, entfällt natürlich die Notwendigkeit der Unterscheidung von zwei möglichen Mustern. Das vereinfacht den Unterricht, wird aber den Erfordernissen des Alltags nicht gerecht. Der Begriff "proportional" wird erst nach der Schlußrechnung Unterrichtsgegenstand. Die Schlußrechnung ist damit ein eigenständiger Unterrichtsgegenstand, der isoliert von der Funktionsthematik betrachtet wird.

Insgesamt zielen die Überlegungen des Autors darauf, Verständnis für grundlegende mathematische Begriffe, Ergebnisse und Verfahren zu erreichen. Dieses Grundanliegen ist aber nicht nur für lernschwache Schüler von Bedeutung. Daher ist dem Autor zuzustimmen, wenn er schreibt: "Das Lehrbuch wendet sich an alle Unterrichtenden der Mathematik (Studenten, Lehrer und Kollegen; insbesondere auch an Lehrtextautoren) und an alle, die mit Mathematikunterricht befaßt sind" (Seite 14). Um Verständnis zu erreichen, wird vorgeschlagen, bei der Erklärung neuer Begriffe nicht an Fachbegriffe anzuschließen, sondern an möglichst vertraute, alltagsnahe Vorstellungen. Dagegen ist nichts einzuwenden, wenn dann schließlich doch die Begriffsbildung auf mathematischer Ebene vollzogen wird. Das ist aber nicht immer der Fall. Wenn in dem Buch gelegentlich kritisiert wird, daß sich Schulbuchautoren an der Fachsystematik orientieren, so kann das nicht verwundern, da in dem hier vorgestellten Konzept für Mathematikunterricht die Fachsystematik kein Ziel darstellt. Mathematikunterricht (auch für lernschwache Schüler) sollte sich aber sehr wohl an der Mathematik orientieren und damit ihre Systematik in angemessener Weise anstreben.

Es dominiert in dem Buch zwar die Diskussion der Verständlichkeit von Lehrtexten, es ist aber die prinzipielle Verständlichkeit der Sprache gemeint. Insofern sind auch viele Orientierungen für die Sprache des Lehrers enthalten. Das Buch ist insbesondere im 1.Teil auch in der Art geschrieben, wie der Inhalt des Buches es für mathematische Texte für den Mathematikunterricht fordert. So erfolgt immer eine Vororientierung und die Ausführungen werden durch eine Zusammenfassung abgeschlossen.

Unabhängig davon, ob man als Leser der Konzeption zustimmt oder nicht, enthält das Buch viele wertvolle methodische Hinweise zur Gestaltung des Mathematikunterrichts und Anregungen zum Nachdenken über Möglichkeiten zur Verbesserung des Unterrichts.

Autor

Schulz, Wolfgang, Prof. Dr., Humboldt-Universität, Institut für Mathematik, Abt. Didaktik, Unter den Linden 6, D-10099 Berlin. wschulz@mathematik.hu-berlin.de