Mathematikdidaktik: Die Erforschung theoretischen Wissens in sozialen Kontexten des Lernens und Lehrens[1]

Heinz Steinbring, Dortmund

Abstract: *Didactics of mathematics: Investigating theoretical knowledge in social contexts of learning and teaching.* The problem of "defining" mathematics education as a proper scientific discipline has been discussed controversely for more than 20 years now. The paper tries to clarify some important aspects especially for answering the question of what makes mathematics education a specific scientific discipline and a field of research. With this aim in mind the following two dimensions are investigated: On the one hand, one has to be aware that mathematics is not "per se" the object of research in mathematics education, but that mathematical knowledge always has to be regarded as being "situated" within a social context. This means that mathematical knowledge only gains its specific epistemological meaning within a social context and that the development and understanding of mathematical knowledge is strongly influenced by the social context. On the other hand the specificity of the theory-practice-problem poses an essential demand on the scientific work in mathematics education.

Kurzreferat: Das Problem der "Definition" von Mathematikdidaktik als einer eigenen wissenschaftlichen Diziplin wird seit mehr als 20 Jahren kontrovers diskutiert. Dieser Beitrag versucht insbesondere grundlegende Aspekte zur Beantwortung der Frage zu klären: Was macht die Mathematikdidaktik als eigenständige Forschung und Wissenschaft aus? Unter dieser Zielsetzung werden zwei zentrale Dimensionen untersucht. Zum einen muß beachtet werden, daß der Gegenstand mathematikdidaktischer Forschung nicht das mathematische Wissen "an sich" ist, sondern daß dieses Wissen grundsätzlich im Kontext sozialer Prozesse der Vermittlung verortet werden muß; dies bedeutet, daß das mathematische Wissen erst in einem sozialen Kontext seine besondere epistemologische Bedeutung erhält und umgekehrt, daß die Entwicklung und das Verstehen mathematischen Wissens durch den sozialen Kontext beeinflußt wird. Zum anderen stellt die Besonderheit des Theorie-Praxis-Problems eine spezifische Anforderung für die wissenschaftliche Arbeit der Mathematikdidaktik dar.

ZDM-Classification: C30, D20, E20

1. Mathematikdidaktik als eigene Forschungsdisziplin – Wesentliche Bedingungen ihres Forschungsfeldes

Aus traditioneller Sicht wird der Mathematikdidaktik eine defizitausgleichende Rolle zugeschrieben – und unter idealen Bedingungen wäre sie eigentlich völlig überflüssig:

– Auf der einen Seite gibt es den fachwissenschaftlichen Experten – den Mathematiker – der das mathematische Wissen bereitstellt. Und da die Mathematik *per definitionem* logisch und wahr, sowie streng systematisch vom Einfachen zum Komplexen aufgebaut ist, müßte sie auch *per se* das theoretische Wissen sein, das ohne weiteres verständlich ist und die optimale Lernstruktur verkörpert.

– Auf der anderen Seite gibt es den Lernenden, der den Lernstoff aufzunehmen hat und sich dazu nur an die perfekten Vorgaben der Mathematik halten muß. Daß eine große Zahl von Schülerinnen und Schülern, von Studentinnen und Studenten ganz erhebliche Probleme mit der abstrakten Mathematik hat, ist – streng mathematisch und logisch gesehen – kein zureichender Grund von dieser idealen – ja geradezu im mathematischen Sinne *kanonischen* – Theorie des Lernens abzuweichen, denn es gibt mehr als den einen notwendigen Beispielfall für direktes erfolgreiches Mathematiklernen, und das liefert schon den Existenzbeweis dieses Ideals.

Die hier als *"kanonische Lerntheorie"* bezeichnete traditionelle Vorstellung über den Erwerb mathematischen Verstehens unterliegt zwei fundamentalen Fehleinschätzungen.

(1) Die historische Entwicklung der Mathematik hat über mehr als 2000 Jahre hinweg zusammen mit erkenntnistheoretischen Fragen ihrer Grundlagen – und auch mit Problemen des Lehrens von Mathematik – zu einem streng logischen und hierarchischen, systematischen Gebäude des mathematischen Wissens geführt, das auf einfachen, sicheren Fundamenten aufbaut und mit seinen vielfältigen Spezialgebieten auf immer höhere Etagen der Abstraktion und Allgemeinheit führt. Das auf diese Weise geordnete, gesamte mathematische Wissen wird im Prinzip mit einer einzigen, universellen einheitlichen Sprache beschrieben. Diese Einheitlichkeit der Mathematik (Bourbaki, 1974), die über die axiomatische Methode realisiert wird, bedeutet etwa, daß der elementare Begriff der Zahl "5" und der abstraktere Begriff des "Erwartungswertes einer binomialverteilten Zufallsgröße" gleichartige Objekte in der Beschreibung durch die mathematische Mengen-Sprache sind.

Dieses historische und zeitlich geprägte Produkt des mathematischen Wissenskorpus erscheint in seiner logischen Klarheit, dem Aufbau vom Einfachen zum Komplexen und Abstrakten, sowie durch seine einheitliche Sprache gleichzeitig als die ideale Zubereitung des Wissens für seinen Erwerb und sein Verstehen – wie es zum Beispiel auch die Maxime der Bewegung der sog. "Neuen Mathematik" war.

Das erste große Mißverständnis ist es, davon auszugehen, daß das Ergebnis einer langwierigen historischen Entwicklung, nämlich die einheitliche Darstellung des mathematischen Wissens, unhinterfragt und uneingeschränkt auch der direkte Ausgangspunkt für das Lernen von Mathematik sei.

(2) Parallel zur Deutung des mathematischen Wissens als wohlgeordnetem, fertigem Stoff wird das Unterrichten und Lernen von Mathematik als Stoffvermittlung und Stoffaneignung verstanden. Entsprechend einer scheinbar rein quantitativen Ausweitung der wissenschaftlichen Mathematik soll sich das Lernen der Studenten und Schüler durch kontinuierliche Akkumulation des mathematischen Stoffs vollziehen. Dieses Nürnberger-Trichter Modell des Lernens ist sicherlich in vielen Wissenschaften inzwischen – hoffentlich – ad acta gelegt worden; in der Mathematik sollte es aber aufgrund der elaborierten Aufbereitung des Wissens zumindest im Idealfall funktionieren. Und in der generellen Tendenz zeigt es im Unterricht und

im Studium der Mathematik wesentliche Wirkungen. Wie auch anders, als auf dem vorgegebenen Wege vom Einfachen zum Komplexen sollte oder könnte man das mathematische Wissen Schritt für Schritt, Stückchen für Stückchen nacheinander in sich aufnehmen – sprich: lernen, wenn man nicht Gefahr laufen will, daß auf dem logischen Wissensweg Lücken aufreißen, die ein weiteres Lernen und Verstehen absolut unmöglich machen würden?

Dennoch, das zweite große Mißverständnis ist eine zu naive Annahme über die Prozesse des Lehrens, sowie des Lernens und Verstehens; weder Unterrichten noch Lernen sind geradlinige, lineare und logisch konsequente Wege, auch wenn das wohlgeordnete mathematische Wissen dies vermeintlich zu erzwingen scheint.

Und hier fängt eine wissenschaftliche Didaktik der Mathematik an; sie muß die beiden dargestellten Mißverständnisse sorgfältig zur Kenntnis nehmen und grundsätzlich in Frage stellen. Dies kann nicht bloß heißen, nur die Seite des Lernens von Mathematik im Auge zu haben und die naiven Lern- und Verstehensmodelle zu kritisieren. Diese Kritik läuft solange ins Leere, solange man nicht die mit dem falschen Lernmodell eng zusammenhängende Auffassung von der Natur des mathematischen Wissens in Zweifel zieht. Beide Mißverständnisse bedingen und stabilisieren sich gegenseitig; mit beiden muß gleichzeitig aufgeräumt werden.

2. Mathematisches Wissen, Mathematikunterricht und Mathematiklernen als eigenständige Prozesse

Die genannten Fehleinschätzungen sind von zwei theoretischen Perspektiven der Mathematikdidaktik grundsätzlich in Frage gestellt worden:

(1) Eine philosophische und epistemologische Kritik wies auf eine zu schlichte Deutung der Natur des mathematischen Wissens hin, und zwar sowohl für das akademische, wissenschaftliche Wissen, wie auch für das schulmathematische Wissen.

(2) Eine soziologische und interaktionistische Kritik bemängelte die vereinfachte Deutung von mathematischen Lehr-Lern-Prozessen sowie von der besonderen Kultur des Mathematikunterrichts.

ad (1) Aus Sicht der epistemologischen und philosophischen Kritik muß betont werden, daß mathematisches Wissen nicht als fertiges Produkt, sondern für die didaktischen Prozesse des Lehrens und Lernens insbesondere unter seiner (historischen und aktuellen) *Entwicklungsdynamik* gesehen werden sollte. Das sich entwickelnde und verändernde mathematische Wissen kann nicht als *fertiges Produkt* “Mathematik” vermittelt werden, sondern der *konstruktive Prozeß* des “Mathematisierens” (Freudenthal, 1987) muß im Vordergrund stehen.

Der für eine wissenschaftliche Mathematikdidaktik wesentliche Aspekt in der Natur des mathematischen Wissens besteht darin, daß mathematische Begriffe sich nicht direkt auf Dinge der Welt beziehen, sondern auf *Beziehungen zwischen Dingen*. “Moderne Wissenschaft tendiert mehr und mehr zu einem Verständnis von Begriffen, nach dem sie nicht länger Substanz-Begriffe im klassischen Sinne sind, sondern Relations- oder Beziehungsbegriffe. ... Entsprechend sind Begriffe keine Namen oder Bezeichnungen von Dingen, sondern Beziehungen zwischen Dingen. Ein Begriff, der zum Beispiel ein Merkmal eines Dinges bezeichnet, bezieht sich nicht nur auf dieses Merkmal, sondern auf die Beziehungen zwischen diesem und der Gesamtheit zugehöriger Merkmale.” (Jahnke & Otte, 1981, S. 76f).

Dieses Verständnis mathematischer Begriffe als Beziehungen und nicht als Namen für Dinge oder für empirische Eigenschaften stellt einen grundlegenden Aspekt für die Entwicklung der Mathematikdidaktik als wissenschaftlicher Disziplin dar. “Für die Didaktik ist es zum Beispiel offensichtlich, daß das didaktische Problem in seinem tieferen Sinne, d.h. in dem Sinne, daß es notwendig ist, es wissenschaftlich zu bearbeiten, durch die Tatsache entsteht, daß Begriffe Beziehungen reflektieren und keine Dinge.” (Jahnke & Otte, 1981, S. 77f).

Dies bedeutet insbesondere, daß die mathematischen Begriffe, wie Zahlen, Funktionen, Vektoren, – die ja keine Dinge im herkömmlichen Sinne sind, sondern Beziehungen verkörpern – in der Wahrnehmung oder auch in einer anderen intuitiven Erfahrung nicht direkt zugänglich sind – wie zum Beispiel reale oder physische Gegenstände –, sondern durch Zeichen bzw. Symbole repräsentiert werden müssen. Diese Zeichen und Symbole stellen ein semiotisches System dar, das für die mathematische Tätigkeit von fundamentaler Bedeutung ist. Es entsteht hier ein Paradox des Lernens von Mathematik: Um einen nicht direkt zugänglichen, mathematischen Begriff zu bearbeiten und zu verstehen, benötigt man ein angemessenes symbolisches Repräsentationssystem; um dieses semiotische Zeichensystem nicht mit dem mathematischen Begriff zu verwechseln, und um in diesem System sinnvoll zu operieren, ist die Kenntnis des entsprechenden mathematischen Begriffs notwendig (vgl. Duval, 1993, S. 37f; Steinbring, 1997a, 1998). Mit dieser epistemologischen Position ist mathematisches Wissen für den Unterricht und für das Lernen nicht einfach ein fertig vorgegebenes Produkt. Die (offenen) Begriffs-Beziehungen machen das mathematische Wissen aus, und diese Beziehungen werden erst im sozialen Prozeß des Lehrens und Lernens vom Schüler aktiv konstruiert.

Diese epistemologische Wissensauffassung hat schon von Beginn der Grundschule an zur Konsequenz, das mathematische Wissen als theoretisches Wissen zu verstehen, ein Wissen, das letztlich nicht empirisch definiert werden kann. Dies bedeutet nicht (wie vielleicht einige Kritiker vorschnell schlußfolgern würden), dieses Wissen hätte gar nichts mit der konkreten Wirklichkeit der Kinder zu tun. Im Gegenteil: erst wenn mathematisches Wissen ein eigenständiger und lebendiger Bestand ist, dann kann es als ein variables Instrument zur Erkenntnis und Deutung der Wirklichkeit und der Erfahrungen der Kinder produktiv beitragen. Diese Beziehung stellt eine zu erkundende Herausforderung dar, sie ist offen und unbestimmt, sie ist nicht simpel und fertig vorgegeben.

ad (2) Die traditionelle mathematische Stoffdidaktik war neben ihren eigentlichen Arbeiten nur insoweit an alltäglichem Mathematikunterricht interessiert, daß die

Defizite realer Unterrichtsprozesse gegenüber dem idealen Unterrichtsmodell deutlich werden sollten. Alltägliche mathematische Unterrichts- und Lernprozesse werden erst seit ca. 20 Jahren unter einer interaktionistischen Perspektive für sich ernst genommen und analysiert (z.B. Bauersfeld, 1978, 1988; Krummheuer 1984, 1988; Maier & Voigt, 1991, 1994; Voigt, 1984, 1994). Der alltägliche Mathematikunterricht wird als eine eigenständige Kultur angesehen, die nicht durch die Struktur der wissenschaftlichen Disziplin in direkter Weise bestimmt werden kann. Diese Kultur bringt einen spezifischen Typ mathematischen Wissens und mathematischer Sprache hervor. Die Mathematik in dieser Unterrichtskultur ist nicht einfach der mathematischen Wissenschaft untergeordnet, dieses Wissen ist Teil der umfassenden gesellschaftlichen Mathematik (Wittmann, 1995).

Interaktionistische Analysen alltäglichen Mathematikunterrichts decken versteckte Muster und Mechanismen in Lehrprozessen auf und sie zeigen, in welch enger Wechselbeziehung das mathematische Wissen und seine Vermittlungsmethoden zueinander stehen (Steinbring, 1991a, 1997b). Allein die interaktiven, sozialen Verhaltensweisen der Beteiligten in einer mathematischen Unterrichtskultur sind keine Garantie für erfolgreiches Lernen von Mathematik. “In alltäglichen Unterrichtsstunden lassen sich oft Interaktionsmuster rekonstruieren, in denen die Lehrer die Schüleraktivitäten kleinschrittig beeinflussen, ohne daß dadurch günstige Bedingungen dafür geschaffen sind, daß die Schüler wünschenswerte Lernprozesse im Problemlösen und in der Begriffsentwicklung machen ... Wir sollten der Versuchung widerstehen, Mathematiklernen mit der erfolgreichen Beteiligung des Schülers an Interaktionsmustern zu identifizieren” (Voigt, 1994, S. 82).

In den Prozessen der Vermittlung mathematischen Wissens müssen sorgfältig die fundamentalen Unterschiede und Eigenständigkeiten von Lehren und Lernen beachtet werden. Die grundsätzliche Trennung von sozialen und psychischen Prozessen hat Luhmann im Rahmen systemtheoretischer Analysen herausgearbeitet. “Die Pädagogik wird es kaum zugeben können, daß psychische Prozesse und soziale Prozesse völlig getrennt operieren. Aber das Bewußtsein der Individuen kann mit eigenen Operationen andere Individuen nicht erreichen. ... Aber wenn Kommunikation zustande kommen soll, muß ein ganz anderes, ebenfalls geschlossenes, ebenfalls autopoietisches System in Tätigkeit treten, nämlich ein soziales System, das Kommunikationen durch Kommunikationen reproduziert und nichts weiter tut als dies” (Luhmann, 1996, S. 279). Das psychische System basiert auf Bewußtheit und das soziale System basiert auf Kommunikation. “Ein soziales System kann nicht denken, ein psychisches System kann nicht kommunizieren. Kausal gesehen gibt es trotzdem immense, hochkomplexe Interdependenzen.” (Luhmann, 1997a, S. 28).

Welche Möglichkeiten und Bedingungen gibt es, daß das Kommunikationssystem Unterricht das psychische System Bewußtsein des Schülers anregt? “Kommunikationssysteme und psychische Systeme (oder Bewußtsein) bilden zwei klar getrennte autopoietische Bereiche; ... Diese beiden Systemarten sind jedoch in einem besonders engen Verhältnis miteinander verbunden und bilden wechselseitig eine “Portion notwendiger Umwelt”: Ohne Teilnahme von Bewußtseinssystemen gibt es keine Kommunikation, und ohne Teilnahme an Kommunikation gibt es keine Entwicklung des Bewußtseins” (GLU, 1997, S. 86).

Für die Herstellung möglicher “Verbindungen” zwischen Kommunikation und Bewußtsein stellt die Sprache ein zentrales Mittel dar. “Die Spezifität des Verhältnisses von Kommunikation und Bewußtsein hängt ... mit der Tatsache zusammen, daß diese Koinzidenz dank der Verfügbarkeit über Sprache ... nicht zufällig passiert, sondern erwartet und zum Teil geplant werden kann. ... [man] kann ... sagen, daß die sprachliche Kommunikation die psychischen Systeme als ein Medium behandeln kann, das immer bereit ist, kommunikative Formen anzunehmen. Das Bewußtsein kann seinerseits die Sprache benutzen, um die Kommunikation als ein Medium zu behandeln, dem es immer seine Formen einprägen kann; denn ein sprachlich ausgedrückter Gedanke kann immer kommuniziert werden und dadurch den Kommunikationsprozeß zwingen, einen psychischen Reiz zu verarbeiten” (GLU, 1997, S. 87).

Die Mathematikdidaktik muß beachten, daß es zwischen dem sozialen System Mathematikunterricht mit seinen Kommunikationsstrukturen und dem psychischen System Mathematiklernen der Schüler keine direkten Abhängigkeiten oder unmittelbare Einflußnahmen gibt.

Unsere Überlegungen zum wissenschaftlichen Feld der Mathematikdidaktik führen somit zu diesem Komplex von drei autonomen Systemen mit indirekten Wechselbeziehungen (Tab. 1):

Mathematik	LehrerIn	SchülerIn
Mathematisches Wissen	Mathematik-unterricht	Lernen und Verstehen von Mathematik
Begriffe als Beziehungen	Kommunikation und Unterrichtskultur	individuelle, subjektive Deutungen
das epistemologische System	das soziale System	das psychische System

Tab. 1

Jeder der drei Bereiche stellt ein autonomes, selbstreferentielles System dar; die Beziehungen zwischen den drei Bereichen erfolgen weder in einer kausalen Abfolge von der Mathematik über den Lehrer in den Kopf des Schülers, noch gibt es direkte Einflüsse des einen auf ein anderes System; zwischen den Systemen ergeben sich Interdependenzen oder “Kopplungen” (Varela, 1997), also nur indirekte, vermittelte Einflüsse und Rückwirkungen. Das theoretische, mathematische Wissen “ändert” sich, wenn es zum Gegenstand der Unterrichtskommunikation wird; und im Verstehensprozeß des Schülers unterliegt das mathematische Wissen einer weiteren “Änderung”.

Beispiel einer Unterrichtsepisode: Anhand eines Glücksspiels mit Würfeln werden im Unterricht einer 5. Klasse die elementaren Wahrscheinlichkeitsereignisse und die zusammengesetzten Ereignisse für die Ausfälle des Würfels mit Hilfe der Mengen-Sprache eingeführt. Jetzt geht es darum, das sog. “unmögliche Ereignis” zu verstehen.

48 L: ... Wenn ich jetzt folgendes sage: Würfle eine Zahl *kleiner* eins?
49 S: ... geht nicht!
50 L: Aber auch das ist ein Ereignis! Allerdings, wie du jetzt schon richtig gesagt hast, dieses Ereignis .....
51 S: .... geht nicht! ..... Geht nicht!!
52 L: Ja. Wie würden wir das jetzt mit einem Adjektiv versehen?
52 S: ..... sicher, ...
53 S: ..... das unsichere Ereignis.
54 L: Das unsichere? Wir wollen einfach sagen, das unmögliche Ereignis. Und jetzt meine Frage: Was ist das eigentlich für eine Teilmenge, wenn ich vom unmöglichen Ereignis spreche?
55 S: Das geht ja gar nicht!

Im System "Mathematik" ist das "unmögliche Ereignis" ein Ereignis wie jedes andere auch, und auf die gleiche Weise mit der Mengensprache beschreibbar: "$\{\ \}$" bezeichnet die leere Menge; in der Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutet sie das unmögliche Ereignis. Unter einer Perspektive der Entwicklung und der Veränderung mathematischen Wissens ist das unmögliche Ereignis jedoch fundamental verschieden von den anderen, konkret beobachtbaren Ereignissen, wie z.B. Würfle eine *gerade* Zahl $=\{2,4,6\}$. Eine epistemologische Analyse des unmöglichen Ereignisses hätte diese Unterschiede zu identifizieren, und würde zu erkenntnistheoretischen Einsichten gelangen, die ähnlich den Deutungen und Auffassungen zur Zahl Null in der Geschichte der Mathematik wären.

Im kommunikativen System "Mathematikunterricht" wird in dieser Episode ein eigenes Verstehen des "unmöglichen Ereignisses" konstruiert, das im sozialen System interaktiv hergestellt wird und vom individuellen, kognitiven Verstehen verschieden ist, jedoch darauf einwirkt. In der Kommunikation wird die formal mögliche Beschreibung "Würfle eine Zahl *kleiner* eins!", die aus einer syntaktischen Variation zum Beispiel entstehen könnte ("Würfle eine Zahl *größer* eins!") als ein gleichwertiges Ereignis benannt; dieses Ereignis erhält den Namen: "unmögliches Ereignis"; und allgemein: "Ereignisse, die nicht gehen, heißen unmögliche Ereignisse". (Vergleiche: Wenn man nichts zählen kann, wenn man keine Anzahl hat, dann ist dies die Zahl 0).

Im psychischen System "Mathematik lernen und verstehen" werden weitere, andere Bewußtseinswahrnehmungen von dem, was ein unmögliches Ereignis sein könnte, ausgelöst; vielleicht individuelle Deutungen der Art, daß ein unmögliches Ereignis in konkreten Spielen mit Würfeln nicht geht, und daher auch tatsächlich nicht möglich ist und kein richtiges Ereignis sein kann.

3. Die Spannung zwischen Unterrichtspraxis und Fachwissenschaft: Das Theorie-Praxis-Problem in der Mathematikdidaktik

Die Mathematikdidaktik unterliegt einer *zweifachen Spannung* zwischen der Fachwissenschaft und der Schulpraxis: Der Mathematik ist die Didaktik – aus der Sicht, wie sie sie sieht und auch sehen möchte – nicht wissenschaftlich genug. Und der Unterrichtspraxis ist die Mathematikdidaktik häufig zu theoretisch und zu praxisfern.

Die Gründe für die Einschätzung der Didaktik durch die Mathematik sind schon vorher angesprochen worden. Die traditionell an die Didaktik gestellten Anforderungen der Unterrichtspraxis verstärken häufig die oben kritisierte Sicht von der Mathematikdidaktik als einer methodischen Hilfsdisziplin, die den abstrakten mathematischen Stoff für das Lehren und Lernen in der Schule zusätzlich aufzubereiten und verdaulich zu machen hat, in Lehrplänen, in Curricula, Schulbüchern und in Unterrichtsvorschlägen, Lehrerhandbüchern und didaktisch-methodischen Anleitungen und Rezepten. Was die Mathematikdidaktik ausarbeitet, sollte doch – bitte schön – möglichst direkt und unverändert im Unterrichtsalltag benutzt werden können.

– Das Verhältnis zur Mathematik aus Sicht der Didaktik: Wie schon oben mit dem Konzept des "epistemologischen Systems" angedeutet, impliziert für die Didaktik der Bezug zur Fachwissenschaft die Herausarbeitung einer Auffassung von Mathematik als einem vielfältigen, lebendigen und anwendungsreichen Wissen, und zwar im Hinblick für die Erfordernisse des Lehrens und Lernens von Mathematik. "Die didaktische Arbeit ... muß m.E. an der mathematischen Aktivität als einem ursprünglichen und natürlichen Element der menschlichen Erkenntnistätigkeit ansetzen, wobei "Mathematik" als breites gesellschaftliches Phänomen zu verstehen ist, dessen Vielfalt an Beziehungen und Ausdrucksmöglichkeiten sich in den Fachbereichen für Mathematik an den Universitäten nur zum Teil widerspiegelt. Mathematikdidaktiker brauchen daher selbst eine lebendige Beziehung zur Mathematik und zu deren Wirklichkeitsbezügen, und sie müssen einen wesentlichen Teil ihres beruflichen Lebens der Anregung, Beobachtung und Reflexion mathematischer Aktivitäten von Kindern, Schülern und Lehrerstudenten widmen. In der faszinierenden Begegnung zwischen Mensch und Mathematik und der umsichtigen Organisation dieser Begegnung liegt der eigentliche Ursprung für mathematikdidaktisches Denken und Handeln. Dieser Erfahrungsbereich bildet daher eine natürliche Gesprächsbasis mit Lehrenden." (Wittmann, 1992, S. 59/60).
– Der doppelte Bezug zur Schulpraxis aus Sicht der Didaktik: Die Schulpraxis ist gleichzeitig Forschungsfeld und Abnehmer der Mathematikdidaktik, und zwar sowohl im Hinblick auf die universitäre Ausbildung zukünftiger Mathematiklehrer sowie im Rahmen der Lehrerfortbildung, der Materialentwicklung, neuer didaktischer Konzepte und Vorschläge. Das Theorie-Praxis-Problem in der Mathematikdidaktik (selbst in internationalen Forschungsgruppen Gegenstand wissenschaftlicher Analysen) impliziert, daß es keine einfachen, direkten Transfers zwischen den praktischen Aufgaben und den theoretischen Arbeiten geben kann. Die Mathematikdidaktik kann die Institution Schule, den Mathematikunterricht und das Lernen von Mathematik – alles autonome Systeme – nicht direkt steuern, beeinflussen oder verändern; die Wechselbeziehungen zwischen beiden Bereichen sind von indirekter Art.

Wissenschaftlicher Gegenstand der Mathematikdidaktik sind *soziale Vermittlungsprozesse mathematischen Wissens* in verschiedenen praktischen Kontexten – insbesondere mathematische Unterrichts- und Kommunikationsprozesse. Daraus ergeben sich an die Mathematikdidaktik Anforderungen auf zwei Ebenen: Zum einen sind konstruktive, didaktische Entwicklungsarbeiten zu erbringen. Dabei geht es zum Beispiel um die Ausarbeitung von theoretischen Konzepten für innovativen Unterricht und um Design von exemplarischen Lernumgebungen für die Schulpraxis nach dem Prinzip des aktiv-entdeckenden und sozialen Lernens, gemäß den sich wandelnden sozialen Bedingungen und den grundlegenden Anforderungen einer "Bildung für alle Kinder" im Mathematikunterricht. Zum anderen muß die Mathematikdidaktik (unter Bezugnahme auf andere Wissenschaften: Psychologie, Pädagogik, Soziologie, Erkenntnistheorie, Philosophie, Geschichte der Mathematik, ...) die Besonderheiten und Bedingungen, sowie Muster und Strukturen von mathematischen Vermittlungs- und alltäglichen Kommunikationsprozessen beschreiben, modellieren, analysieren und wissenschaftlich erforschen.

Die analytische und die konstruktive Forschungsdimension der Mathematikdidaktik stehen in dialektischer Beziehung zueinander. Die z.B. im Rahmen der Mathematikdidaktik als "design science" erarbeiteten "künstlichen Objekte" (Wittmann, 1992) können in verschiedener Weise als mögliche Alternativen in den mathematischen Lehr-Lern-Prozeß eingeführt und dann ihre Auswirkungen auf die beteiligten, gekoppelten Systeme erneut beobachtet und analysiert werden, wobei neue systeminterne Mechanismen und Bedingungen erkennbar werden können. Dies kann wiederum zu einer Revision der künstlichen Objekte führen.

Die Spannung zwischen der Fachwissenschaft und der Schulpraxis darf nicht als eine lineare, hierarchische Verbindungskette interpretiert werden, wie in dem Diagramm (Abb. 1) angedeutet.

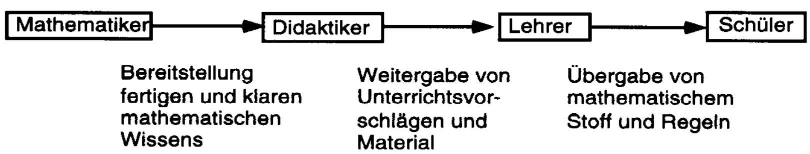

Abb. 1

Der doppelte Bezug der Mathematikdidaktik zur Unterrichtspraxis ist ein Spiegel des doppelten Bezugs des Lehrenden zum Schüler; dies wird in dem Diagramm (Abb. 2) verdeutlicht.

Dieses Modell bringt eine differenzierte Beschreibung des Theorie-Praxis-Problems in der Mathematikdidaktik zum Ausdruck: Man kann nicht von direkten Einflüssen oder gar von hierarchischen Abhängigkeiten zwischen der Theorie und Praxis ausgehen, sondern von Wechselbeziehungen zwischen zwei gleichberechtigten, voneinander relativ unabhängigen sozialen Bereichen, deren Aufgabe die Vermittlung mathematischen Wissens in sozialen Kontexten unter konstruktiver und reflektierender Sicht-

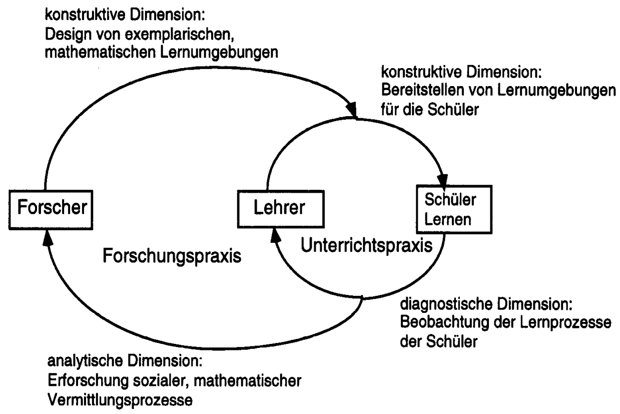

Abb. 2

weise ist (vgl. SCTP "Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education" Bazzini, 1994, Christiansen, 1985; Seeger & Steinbring 1992; Steinbring, 1994, Verstappen, 1988).

4. Forschungsfelder der Mathematikdidaktik

In der Tradition der Mathematikdidaktik lassen sich zwei zentrale Arbeitsorientierungen identifizieren, eine stärker an der Mathematik angelehnte Richtung, meist mit der Bezeichnung "Stoffdidaktik" verbunden, und eine eher pädagogische, am Kind und am Lernen des Kindes, ausgerichtete Strömung. In gewissem Sinne sind diese Richtungen auch aus schulischen Traditionen und Bindungen an Schulstufen entstanden; zum einen eine stark gymnasial orientierte stoffbezogene Mathematikdidaktik, zum anderen in enger Beziehung zur Volksschullehrerbildung an den pädagogischen Hochschulen – heute der Ausbildung von Primarstufenstudentinnen – eine pädagogische Mathematikdidaktik.

Diese grundlegenden Richtungen wirken auch heute noch nach, in reiner Form insbesondere dort, wo sie sich im Rahmen der vorgegebenen Studiengänge und organisatorischen Strukturen strikt den hergebrachten Anforderungen der universitären Lehrerausbildung verpflichtet fühlen. In der mathematikdidaktischen Forschung haben sich beide Richtungen differenzierter auf die Problematik des Lehrens und Lernens mathematischen Wissens eingestellt, und zwar, wie vorher schon angesprochen, unter einer konstruktiven und einer analytischen Forschungsdimension.

Zur *konstruktiven Ausrichtung* gehören zentral Arbeiten der Entwicklung von Unterrichtsvorschlägen und Lehrmaterialien. Diese Arbeit ist sich jedoch stärker der Rahmenbedingungen ihrer Realisierbarkeit in der Schulpraxis bewußt und bezieht auch systematische Analysen zur Natur des mathematischen Wissens mit ein. Die hier erarbeiteten “Produkte” werden somit nicht mehr als fertige und unveränderliche Vorgaben an die Schulpraxis übergeben. Es wird zum Beispiel von mathematischen Lernumgebungen gesprochen, die vom Lehrer an spezifische Lernerfordernisse angepaßt werden sollten, und die beim Schüler Lernmöglichkeiten in Gang setzen sollten. Die Grenzen zwischen den drei Systemen “mathematisches Wissen” “Unterricht” und “Lernen und Verstehen” werden beachtet, und zum Beispiel wird das Konzept des eigenständigen, aktiven und sozialen Lernens der Schüler als notwendige Bedingung für den Lernerfolg systematisch eingebaut. Es ist zu erkennen, daß die konstruktive Dimension Ergebnisse der analytischen Dimension in ihre Arbeiten mehr und mehr einbezieht, und zwar nicht so sehr, um im Rahmen des traditionellen Paradigmas der Mathematikdidaktik einfach die Aufbereitung der Stoffprodukte zu perfektionieren und so vermeintlich Lernen direkt zu ermöglichen, sondern stärker im Sinne einer bewußteren Berücksichtigung vorhandener Grenzen und Differenzen. Mit der Charakterisierung von Mathematikdidaktik als “Design Science” ist von Wittmann (1992) eine prägnante, theoretische Konzipierung für eine solche progressive konstruktive mathematikdidaktische Arbeit vorgeschlagen worden. Diese Konzeption ist insbesondere im Projekt “mathe 2000” in den letzten 10 Jahren erfolgreich realisiert worden.

Unter die *konstruktive Ausrichtung* sind wesentlich zu zählen:

- Entwicklung von Material und Unterrichtsvorschlägen für die Primarstufe, mit Deutungen zur Natur des mathematischen Wissens in der Grundschule, die sich zum einen stärker an der Anschaulichkeit und an konkreten Erfahrungsbezügen orientieren, zum anderen Konzepte, die von Beginn an den theoretischen Charakter des mathematischen Wissens im Sinne der Entwicklung arithmetischer Beziehungen in den Vordergrund stellen.
- Entwicklung von Material und Unterrichtsvorschlägen für die Sekundarstufen (I & II), die sich zum Teil deutlich an den verschiedenen schulmathematischen Stoffbereichen orientieren und als Didaktik der Arithmetik und Algebra, der Geometrie, der Stochastik bekannt sind. Daneben gibt es “querliegende” Gebiete, wie z.B. “Beweisen im Mathematikunterricht”, “Anwendungen von Mathematik” und – inzwischen sehr aktuell – “Aspekte des Einsatzes von Computern und Software im Mathematikunterricht”.
- Mathematikhistorische und philosophische Arbeiten sind auch insoweit zur konstruktiven Arbeitsrichtung zu zählen, als aus ihnen – teils alternative – Vorschläge für Unterrichtseinheiten entstehen können (aber im Rahmen schulischer Strukturen und Lehrpläne längst nicht den gewünschten Erfolg haben). Solche konstruktiven Arbeiten sind teilweise sehr nützlich für die Analyse der Natur des mathematischen Wissens unter einer dynamischen Perspektive und wirken sich damit auf die anderen konstruktiven Bereiche aus.

Aspekte der Philosophie und Geschichte der Mathematik könnten zusammen mit Konzepten der “Anwendung von Mathematik” und “Computer im Mathematikunterricht” zentrale Beiträge für die Grundlegung einer Schulpraxis bezogenen Auffassung des mathematischen Wissens in der universitären Lehrerausbildung werden.

Unter die analytische Ausrichtung sind wesentlich zu zählen:

- an Bezugsdisziplinen (wie der Psychologie, der Soziologie) orientierte (quantitative und qualitative) empirische Untersuchungen individueller und unterrichtlicher Lernprozesse; Untersuchungen zu Themen, wie zum Beispiel:
  - Vorkenntnisse von Schülern
  - Fehleranalysen
  - geometrisches und räumliches Denken
  - stochastisches Denken
  - algebraisches Denken
  - Visualisierung
  - Heuristik und Intuition
  - Rolle der Geschlechter und Lernen von Mathematik
- qualitative (und quantitative) Analysen und theoretische Beschreibungen von Interaktionen im Mathematikunterricht (unter Bezug auf sozialwissenschaftliche und erkenntnistheoretische Konzepte); hier geht es um die Erforschung von Mustern und Mechanismen im System “Mathematikunterricht”. Diese Forschungsrichtung wird mit unterschiedlichen, theoretischen Konzepten verfolgt, zum Beispiel unter der Perspektive des *(radikalen) Konstruktivismus* (v. Glasersfeld), des *sozialen Interaktionismus* (Bauersfeld et al.) oder der *sozialen Epistemologie mathematischen Wissens.*
- empirische Analysen des professionellen Wissens von Mathematiklehrern.

Viele der analytischen Arbeiten in der Mathematikdidaktik stehen in Wechselbeziehungen mit der konstruktiven Seite; so stützt sich zum Beispiel die Erarbeitung von empirischen Forschungsdesigns auf Vorschläge der konstruktiven Didaktik, und Ergebnisse der empirischen (und erkenntnistheoretischen) Analysen wirken auf die Konstruktion von Lernumgebungen zurück. Inzwischen gibt es eine Reihe von Forschungsprojekten, in denen beide Grundorientierungen zusammen in die Forschungskonzeption eingehen.

Zurückblickend auf die als grundlegend vorgestellte konstruktive und analytische Dimension muß angemerkt werden, daß die Entwicklung der Mathematikdidaktik als Wissenschaft, insbesondere in den letzten 25 Jahren, von einer systematischen Reflexion zum besonderen wissenschaftlichen Status der Mathematikdidaktik begleitet war. In dieser wissenschaftstheoretischen Analyse wurden Merkmale für eine Wissenschaft “Mathematikdidaktik” sowie ihre besonderen Methoden und ihre zentralen Bezugsdisziplinen diskutiert. Es finden sich Kennzeichnungen wie zum Beispiel, “angewandte Sozialwissenschaft”, “Ingenieurwissenschaft”, “Wissenschaft vom Mathematikunterricht” oder “Wissenschaft vom Lehren und Lernen von Mathematik” (vgl z.B. die Diskussion in ZDM, 1974, S. 109–132). Ein Beispiel aus jüngerer Zeit ist der Aufsatz von Wittmann (1992) mit dem Titel “Mathematikdidaktik als ‘design science”’, in dem eine systematische, theoretische Fundierung der Mathematikdidaktik mit einer Bewertung ihrer interdisziplinären

Beziehungen zur Mathematik und anderen Fächern, sowie einer Diskussion des Theorie-Praxis-Problems unternommen wird.

5. Anmerkung

[1]Dieser Artikel basiert auf einem Vortragsmanuskript für das *Erste Interdisziplinäre Fachdidaktik Kolloquium,* vom 25. bis 27. Februar, 1998, an der Universität Dortmund. Im Vortrag selbst wurden auch die besonderen Merkmale der nationalen und internationalen Vernetzung der Mathematikdidaktik vorgestellt. Dieser Artikel konzentriert sich auf eine Diskussion dessen, was die Mathematikdidaktik als eigene *Forschungsdisziplin* im wesentlichen ausmacht.

6. Literatur

Bauersfeld, H. (1978): Kommunikationsmuster im Mathematikunterricht – Eine Analyse am Beispiel der Handlungsverengung durch Antworterwartung. – In: H. Bauersfeld et al. (Hg.), Fallstudien und Analysen zum Mathematikunterricht. Hannover: Schroedel, S. 158–170

Bauersfeld, H. (1988): Interaction, construction and knowledge: alternative perspectives for mathematics education. – In: D. A. Grouws; T. J. Cooney; D. Jones (Hg.), Effective mathematics teaching. Reston, VA: NCTM & Lawrence Erlbaum, S. 27–46

Bazzini, L. (Hg.) (1994): Theory and Practice in Mathematics Education. – Proceedings of the Fifth International Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education. Grado, Italy. Padua: ISDAF

Bourbaki, N. (1974): Die Architektur der Mathematik. – In: M. Otte (Hg.), Mathematiker über die Mathematik. Heidelberg: Springer, S. 140–159

Christiansen, B. et al. (1985): Systematic co-operation between theory and practice in mathematics education. – Copenhagen: Royal Danish School of Educational Studies

Duval, R. (1993): Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. – In: Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 3. ULP, IREM de Strasbourg, S. 37–65

Freudenthal, H. (1987): Theoriebildung zum Mathematikunterricht. – In: ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (H.3), S. 96–103

GLU (1997): Glossar zu Niklas Luhmanns Theorie sozialer Systeme, von C. Baraldi, G. Corsi and E. Esposito. – Frankfurt am Main: Suhrkamp

Jahnke, H. N.; Otte, M. (1981): On 'Science as a Language'. – In: H. N. Jahnke; M. Otte (Hg.), Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century, Dordrecht: Reidel

Krummheuer, G. (1984): Zur unterrichtsmethodischen Diskussion von Rahmungsprozessen. – In: Journal für Mathematik Didaktik 5(4), S. 285–306

Krummheuer, G. (1988): Verständigungsprobleme im Mathematikunterricht. – In: Der Mathematikunterricht 34(2), S. 55–60

Luhmann, N. (1996): Takt und Zensur im Erziehungssystem. – In: N. Luhmann; K.-E. Schorr (Hg.), Zwischen System und Umwelt. Fragen an die Pädagogik. Frankfurt am Main: Suhrkamp, S. 279–294

Luhmann, N. (1997a): Was ist Kommunikation? – In: F. B. Simon (Hg.), Lebende Systeme. Wirklichkeitskonstruktionen in der systemischen Therapie. Frankfurt am Main: Suhrkamp, S. 19–31

Luhmann, N. (1997b): Die Gesellschaft der Gesellschaft. – Frankfurt am Main: Suhrkamp

Maier, H.; Voigt, J. (Hg.). (1991): Interpretative Unterrichtsforschung. – Köln: Aulis

Maier, H.; Voigt, J. (Hg.) (1994): Verstehen und Verständigung im Mathematikunterricht – Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung. – Köln: Aulis

Maturana, H. R.; Varela, F. J. (1987): Der Baum der Erkennntnis. – Bern: Scherz

Seeger, F.; Steinbring, H. (Hg.) (1992): The dialogue between theory and practice in mathematics education: Overcoming the broadcast metaphor. – Proceedings of the Fourth Conference on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education (SCTP). Brakel. Bielefeld: IDM Universität Bielefeld (IDM Materialien und Studien; 38)

Steinbring, H. (1991a): Mathematics in teaching processes – The disparity between teacher and student knowledge. – In: Recherches en Didactique des Mathématiques 11(1), S. 65–107

Steinbring H. (1991b): Eine andere Epistemologie der Schulmathematik – Kann der Lehrer von seinen Schülern lernen? – In: mathematica didactica (H.2/3), S. 69–99

Steinbring, H. (1994): Dialogue between theory and practice in mathematics education. – In: R. Biehler; R. W. Scholz; R. Sträßer; B. Winkelmann (Hg.), Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, S. 89–102

Steinbring, H. (1997a): Epistemological investigation of classroom interaction in elementary mathematics teaching. – In: Educational Studies in Mathematics 32, S. 49–92

Steinbring, H. (1997b): Epistemological Constraints of Mathematical Knowledge in Social Learning Settings. – In: A. Sierpinska; J. Kilpatrick (Hg.), Mathematics Education as a Research Domain: A search for identity. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, S. 513-526

Steinbring, H. (1998): Elements of epistemological knowledge for teachers. – In: The Journal of Mathematics Teacher Education 1(2), S. 157-189

Varela, F. J. (1997): Erkenntnis und Leben. – In: F. B. Simon (Hg.), Lebende Systeme. Wirklichkeitskonstruktionen in der systemischen Therapie. Frankfurt am Main: Suhrkamp, S. 52–68

Verstappen, P. F. L. (Hg.) (1988): Report of the Second Conference on Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education. Lochem/Netherlands. – Enschede: S.L.O

Voigt, J. (1984): Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht – Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. – Weinheim: Beltz

Voigt, J. (1994): Entwicklung mathematischer Themen und Normen im Unterricht. – In: H. Maier; J. Voigt (Hg.), Verstehen und Verständigung im Mathematikunterricht – Arbeiten zur interpretativen Unterrichtsforschung. Köln: Aulis, S. 77–111

Wittmann, E. C. (1992): Mathematikdidaktik als "design science". – In: Journal für Mathematik-Didaktik 13(92), S. 55–70

Wittmann, E. C. (1995): Mathematics Education a 'Design Science'. – In: Educational Studies in Mathematics 29(4), S. 355–374

ZDM (1974): Analysen "Didaktik der Mathematik". – In: ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 6(3), S. 109–132

Autor

Steinbring, Heinz, Prof. Dr., Institut für Didaktik der Mathematik, Universität Dortmund, Vogelpothsweg 87, D-44221 Dortmund. E-mail: heinz.steinbring@math.uni-dortmund.de