Zahlenmythen im öffentlichen Leben – Aufgabe für den Mathematikunterricht

Johannes Schornstein, Laufen

Abstract: *Number myths in public life – a task for mathematics education.* When administrative bodies publish figures we are often stunned by the precision with which they seem to render various situations and consequently tend to rely on their correctness. These figures, however, frequently do not describe a situation as accurately as they suggest. Thus working and drawing conclusions from such “precise figures” soon turns out to be highly problematic. Mathematics taught in school today encourages the pupils’ belief in the validity of such seemingly “precise figures”. This article promotes a deeper consciousness of this widely neglected problem and gives first suggestions of how to use the term “precision” in relation to figures in school mathematics in a reasonable and responsible way.

Kurzreferat: Wenn Behörden Zahlen veröffentlichen, dann bestechen diese meist durch eine scheinbar hohe Genauigkeit, die allerdings in Wirklichkeit nicht besteht. Aus dieser Genauigkeit werden dann Schlüsse gezogen, die problematisch sind. Der heutige Mathematikunterricht begünstigt diesen Glauben an die genaue Zahl, statt ihn zu bekämpfen. Der Artikel rückt dieses sträflich vernachlässigte Problem in den Blickpunkt und macht erste Vorschläge, wie man im Mathematikunterricht mit dem Begriff “Genauigkeit” vernünftig und verantwortlich umgehen kann.

ZDM-Classification: M10, N20

1. Exakt 3% – oder irgendwo zwischen 2,4 und 3,6%??

Wir haben 1997 oft gehört, wie unser damaliger Finanzminister immer wieder bekräftigt, dass die BRD die Maastricht-Bedingungen einhalten werde und das Haushaltsdefizit nur maximal 3,0% des Bruttoinlandsprodukts betragen würde. “Und drei Komma Null sind drei Komma null und nicht drei Komma eins oder drei Komma zwei!” stellte er klar. Denn andere hatten vorgeschlagen, auch 3,2% Prozent Verschuldung noch zu akzeptieren. Mir fällt ein, was dazu bei Morgenstern (1973, S. 259) steht: “Es ist deprimierend zu sehen, dass sogar ... führende Fachleute ... die Zahlen für das Bruttosozialprodukt ... in ihrem Nominalwert ernst nehmen. Offensichtlich wurde ... noch niemals nach der Genauigkeit dieser Zahlen gefragt ...”

Welche Genauigkeit die ominöse “Drei-Komma-Null” nun wirklich hat, kann ich nun leider auch nicht sagen. Denn die Beantwortung dieser Frage hätte mehrere volkswirtschaftliche Doktorarbeiten ergeben. Auch in anderen Fällen uferten die Untersuchungen aus. So musste ich mich auf die mir zugänglichen Informationen beschränken. Ich hoffe, dass der Leser hier trotzdem eine Fülle von Information findet. (Für weitere Hinweise bin ich dankbar.)

Im Falle des Bruttosozialprodukts kann ich auf Ergebnisse von Kuznets verweisen, der 1971 für Untersuchungen über Fehlerbereiche in Volkseinkommensstatistiken immerhin den Nobelpreis bekam. Für die Schätzung (!) des Volkseinkommens kam er zu einem Fehler von $\pm 20\%$, den er dann auf Grund der zusätzlichen Annahme der gegenseitigen Kompensation auf $\pm 10\%$ reduzieren konnte (s. auch Laussermayer 1996).

Theo Waigels Drei-Komma-Null kann also auch eine 3,3 sein, falls das offizielle Bruttoinlandsprodukt 10% zu hoch ist, oder eine 2,7, falls es 10% zu klein ist. Und falls man auch beim Haushaltsdefizit einen Fehler von 10% berücksichtigt, schwankt die exakte “Drei-Komma-Null” irgendwo zwischen 2,4 und 3,6.

Dass ich mit meinen Überlegungen nicht so ganz schief liege, entnahm ich einem Bericht der OECD vom Sommer 1997, nach dem Deutschland auf eine Marke von 3,25% zusteuern würde und damit das Ziel erreicht hätte, denn diese Abweichung läge im Bereich des “normalen statistischen Fehlers”, wie lapidar festgestellt wurde.

Wenn man allerdings solche Fehlerbetrachungen anstellt, dann kommt man leicht in Teufels Küche. Natürlich kann man sagen, dass man z.B. Abweichungen bis 0,3% und somit 3,3% noch akzeptiert (in Abb.1 fett gezeichnet). Wenn nun aber etwa Italien auf ein Defizit von 3,5% kommt, ist es schwierig, Italien von der Währungsunion auszuschließen. Denn die Italiener könnten argumentieren, dass die deutsche 3,25 und die italienische 3,5 dann jeweils um 0,3 schwanken (zweiter bzw. dritter Bereich in Abb.1). Da sich die entsprechenden Bereiche überlappen, ist mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit sogar das italienische Defizit kleiner als das deutsche:

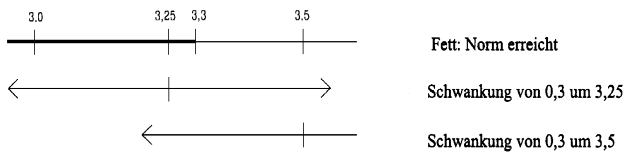


Abb. 1

Das darf natürlich nicht geschehen. Am 3.9.97 lese ich im Kommentar “Euro-Taktiker” (!) der FAZ:

> “Die berühmte ‘Drei-Komma-Null’ ... war stets mehr eine symbolisch-politische Festlegung als eine ernsthafte ökonomische Kennziffer. Das muß auch Nichtökonomen klargeworden sein, zumal es jetzt, wegen einer Berichtigung der Berechnungsgrundlage zum Zwecke europäischer Vergleichbarkeit, ganz so aussieht, als ob Deutschland und Frankreich dieses Jahr tatsächlich die ‘Punktlandung’ schaffen oder gar unter der magischen Grenze bleiben könnten. Man versteht, daß der italienische Außenminister Dini nun dafür plädiert, den Beginn der Währungsunion zu verschieben.”

Zweierlei ist bemerkenswert: Man hat erstens die “Berechnungsgrundlage zum Zwecke der europäischen Vergleichbarkeit” verändert und kann sich nun wieder hinter scheinbar objektiven Zahlen verstecken.[1] Zweitens ist die “Dreikommanull” nur eine symbolisch-politische Festlegung!! Warum wird dann so ein Streit um 3,0 oder 3,2 geführt?

Der Mathematikunterricht hat die geradezu emanzipatorische Aufgabe, die Einsicht zu fördern, dass hier mit Hilfe von Zahlen nur Scheingefechte ablaufen. Statt dessen leistet er heute dem Zahlenmythos Vorschub. Es wird immer wieder betont, dass z.B. die Diagonale im Einheitsquadrat eine Länge von exakt $\sqrt{2}$ hat, und an Beispielen demonstriert, welche Fehler in einer Rechnung entstehen können, wenn man $\sqrt{2}$ durch 1,4 ersetzt. Die Frage aber, welche Aussage gemacht werden kann, wenn man die Idee des Quadrats verlässt und zu einem realen Quadrat übergeht, wird nicht gestellt, weil auch Lehrer dem Glauben an die genaue Zahl erliegen[2].

Der vorliegende Artikel will diesen Glauben erschüttern und aufzeigen, welche gefährlichen Folgen er hat. An Beispielen wird demonstriert, auf welch abenteuerliche Weise manche offizielle Zahl ermittelt wird, und dass auch unser Mathematikunterricht oft mit unsinniger Genauigkeit arbeitet. Schließlich werden Vorschläge gemacht, wie der Mathematikunterricht zum Umgang mit sinnvollen Genauigkeiten erziehen kann.

2. “Genaue” Zahlen sind glaubhaft

Nur genaue Daten führen zu genauen Ergebnissen. Deshalb vermutet man im Umkehrschluss hinter genauen Zahlen exakte Untersuchungen. Bitte stellen Sie sich vor: Helmut Schmidt und F. J. Strauß – ich wähle bewusst die Kontrahenten früherer Jahre – diskutieren im Fernsehen darüber, bei welchem Wirtschaftswachstum die Arbeitslosigkeit endlich sinken würde. Schmidt behauptet, dies sei erst bei 10% Wirtschaftswachstum der Fall, während Strauß diese Zahl auf 4,8% korrigiert. Wem würden Sie glauben?

Ich möchte nur noch ein weiteres Beispiel anfügen, den Leser aber bitten, eigene Beobachtungen zu machen. In meiner Steuererklärung gebe ich immer die Zinsen in folgender Form an:

“Kontonummer	330417	Zins: 987,65 DM”
“Kontonummer	330418	Zins: 446,45 DM”
“mehrere kleinere Konten		Zins: unter 50,00 DM”.

Ob es auch genau 987,65 DM waren, wurde ich noch nie gefragt, wohl aber, ob die 50,00 DM auch wirklich nicht überschritten wurden.

Solche Ereignisse im Mathematikunterricht zu diskutieren, ist sinnvoller, als nach der zwanzigsten Zinsrechenaufgabe die einundzwanzigste (aus dem Lehrbuch) zu stellen.

3. “Genaue” Zahlen sind gefährlich

Der Innenminister vergleicht 1997 die Krankheitstage im öffentlichen Dienst mit denen von Betriebskrankenkassen (BKK) und Krankenkassen der gesetzlichen Krankenversicherung (GKV). Bei den Bundesbediensteten liegt danach die Krankheitsrate pro Arbeitnehmer und Jahr bei 16,8 Tagen, bei BKK und GKV aber bei 13,3 Tagen. Angesichts dieses großen Unterschieds ist es richtig und findet Beifall, dass er einen Maßnahmenkatalog bis hin zu Krankenbesuchen (Kontrollen) beschließt. Und hier wird der Glaube an die genaue Zahl gefährlich.

Ich habe nachgeforscht und fand in “Das Bundesministerium des Inneren informiert” vom 10.1.97 den Satz: “Die Statistiken folgen einer unterschiedlichen Methodik und wurden deshalb vergleichbar gemacht.” Beim Bund wurden z.B. nur 50% der “Kurzzeiterkrankungen (1–3 Tage)” eingerechnet. 50%, das ist so ungenau, das kann nicht stimmen, dachte ich mir und erhielt auf Nachfragen vom Bundesministerium des Inneren folgende Antworten: “Bei GKV und BKK werden die Kurzzeiterkrankungen nur teilweise erfasst; soweit mir bekannt(!), liegt der Erfassungsgrad unter 50 v.H.” Damit ist eins klar: Man wählte 50%, damit die Krankheitstage im öffentlichen Dienst auf keinen Fall zu gering ausfielen. Ich habe auch nach der Genauigkeit der vorgelegten Zahlen gefragt. Antwort: “Ich gehe von einer sehr großen Genauigkeit der Erhebung[3] [des BMdI, J. S.] aus ... Über die Genauigkeit der von BKK und GKV erhobenen Daten liegen mir keine Angaben vor. Mir ist nicht bekannt, ob das Bundesministerium für Gesundheit über entsprechende Angaben verfügt.”

O. Morgenstern hat recht: Nach der Genauigkeit der vorliegenden Zahlen fragt keiner. Selbst wenn die vorgelegten Zahlen richtig wären, wäre es unredlich, eigene Zahlen mit anderen zu vergleichen, deren Fehlerschranke man nicht kennt. Am 20.9. finde ich aber in der Zeitung, dass man beim BGS und beim Zoll die Kalendertage gezählt hat statt wie vorgegeben die Krankheitstage! Also waren die BMdI Zahlen zu hoch. Der BGS-Verband glaubt, dass nun die Fehlzeiten unter der von GKV und BKK liegen. Hat hier vielleicht der Bundesinnenminister falsche Zahlen vorgeschoben, um politisch Gewolltes zu begründen, und alle sind darauf hereingefallen?

Diese “alle” sind unsere ehemaligen Schüler! Müssen wir es nicht zur unterrichtsbegleitenden Pflicht machen, Zahlen immer wieder auf ihren Sinn hin abzuklopfen?!

4. Wie kommen diese Zahlen in ihrer Genauigkeit zustande?

4.1 Sie werden – selten – durch Zählen ermittelt

Ich bin auf einen Fall gestoßen, bei dem zuerst ganz genau gezählt wurde und dann eine Nachzählung erfolgte, auf die OB-Wahl in Neu-Ulm. Ich glaube, dass die dort aufgetretenen Zählfehler auch sonst überall dort auftreten, wo Menschen am Werk sind. Ich selbst habe es erlebt, dass ich samt der übrigen Wahlkommision ein Wahlergebnis mit 100%iger Sicherheit falsch festgesetzt hätte, hätte nicht einer die Frage gestellt: “Was sind das da eigentlich für Wahlzettel?” Trotz Querrechnen und Überprüfen hatten wir einen Stapel übersehen!

Am 21.5.1996 musste eine Stichwahl entscheiden, ob Beate Merk (CSU) oder Gerhard Hötzel (SPD) Oberbürgermeister der 50 000-Einwohner-Stadt Neu-Ulm werden würde. Die Aufgabe, die rund 20 000 Stimmen auszuzählen, erscheint einfach gegenüber der Zählung von rund 20 Milliarden Eiern, die wir in der BRD jährlich essen; oder den Einwohnern von Freiburg, wo z.B. dauernd jemand geboren wird. Das offizielle Endergebnis der Stichwahl lautet deshalb auch:

Von den 34 658 Wahlberechtigten von Neu-Ulm haben bei der Stichwahl 19 049 gewählt, dabei entfielen auf Frau Merk 9 463 und auf Herrn Hötzel 9 460 Stimmen. Ein übliches, wenn auch knappes Ergebnis. Man ersieht allerdings nicht, wie es zustande kam.

Am Wahlabend stand es *9485 zu 9441* für Frau Merk. Weil man Unregelmäßigkeiten vermutete, wurde die Wahl sofort angefochten und das Landratsamt aufgefordert, eine Nachzählung zu veranlassen, die am 19.6.96 stattfand. Dabei musste das Ergebnis in sechs der 66 Stimmbezirke um insgesamt 45 Stimmen zugunsten von Herrn Hötzel korrigiert werden, nun stand es *9462 zu 9463* für Hötzel!

Wichtig erscheint mir erstens, dass hier in rund 10% aller Wahllokale das Ergebnis korrigiert werden musste, und zweitens, dass auch bei diesem relativ einfachen Problem das Endergebnis Fehler im Promillbereich hatte!

Ich muss erwähnen, dass nach dieser Nachzählung der Landrat (CSU) eine erneute Zählung anordnete, was ihm den Vorwurf der Manipulation einbrachte. Denn dabei tauchten einige dubiose Stimmzettel auf, z. B. einer mit einem Doppelkreuz (Warum wurde ein derart auffälliger Stimmzettel bei den vorangehenden mehrmaligen Zählungen nicht entdeckt?) und einer mit dem Zusatz "nur für Hötzel", die beide für ungültig erklärt wurden. Und damit kommen wir zu einer weiteren Frage: Wann ist eine Stimme eine Stimme? Nach dem Bericht der Badischen Zeitung hätte der "nur für Hötzel"-Stimmzettel nicht für ungültig erklärt werden dürfen. Schließlich hatte die CSU-Kandidatin drei Stimmen Vorsprung, es steht *9463 zu 9460,* und der Landrat verzichtete auf weitere Überprüfungen[4].

An diesem Beispiel ersehen wir drei klassische Fehlerquellen. Erstens kommt es auch bei der gewissenhaftesten Messung zu Zähl- oder Messfehlern[5]. Dann kann es durchaus im Interesse der Beteiligten liegen, eine Zahl hoch oder tief zu rechnen. Und drittens stellt sich immer die Frage der Bewertung oder Festlegung (s. auch Abschnitt 5.)

Beim obigen Beispiel lagen die Zählfehler im Promillbereich, nun folgt eins mit weit höherem Fehler. Am 31.12.95 hatte Freiburg offiziell 199 273 Einwohner, am 1.1.96 aber 185 294. Beim Jahreswechsel wurde nicht etwa ein Ortsteil aus Freiburg ausgegliedert, wie man vielleicht vermuten könnte.

Die unterschiedlichen Einwohnerzahlen wurden von zwei unterschiedlichen Institutionen ermittelt, nämlich vom Statistischen Landesamt Baden-Württemberg (erste Zahl) und vom Amt für Statistik und Einwohnerwesen der Stadt Freiburg. Die Differenz beträgt rund 7%. Eine Ursache liegt nach Meinung beider Institutionen darin, dass manche in Freiburg registrierte Abmeldung nicht nach Stuttgart gelangt. Dem Landesamt wird zur Vermeidung von Doppelmeldungen nur die Anmeldung am neuen Wohnort mitgeteilt. Daraus ergibt sich dann – zumindest theoretisch – die entsprechende Abmeldung am bisherigen Hauptwohnort.

Diese Anmeldung unterbleibt anscheinend öfter, wenn etwa ein ordnungsgemäß in Freiburg gemeldeter Student nach seinem Studium in seine kleine Heimatgemeinde zurückkehrt. Da er hier bekannt ist, hält es keiner für nötig, den Zuzug amtlich zu erfassen. Die kleine Gemeinde hat einen Einwohner zu wenig, Freiburg einen zu viel. Das statistische Amt der Stadt Freiburg geht solchen Fällen nach und kommt so zu niedrigeren Einwohnerzahlen. Andererseits ist es für Freiburg nicht schlecht, wenn im Landesamt 14 000 mehr Einwohner registriert sind. Denn pro Einwohner gibt es 1000 DM Ausgleichsmittel, das bringt immerhin 14 Millionen Mark in den Stadtsäckel.

"Erfahrungsgemäß sind es zumeist kleinere und mittlere Gemeinden, die das Statistische Landesamt darauf hinweisen, daß die von ihnen gemäß Melderegister ermittelte Einwohnerzahl höher liegt, als von der amtlichen Fortschreibung ausgewiesen. ... Im Zuge des Berichtigungsverfahrens ergibt sich meist eine Korrektur der amtlichen Bevölkerungszahl der 'mahnenden' Gemeinde nach oben"

teilt der Präsident des Statistischen Landesamtes in einem offenen Brief an die Gemeinden mit. Damit ist klar: Da begünstigte Gemeinden wie Freiburg nicht mahnen, bei benachteiligten aber nachgebessert wird, ist die offiziell angegebene Einwohnerzahl in Baden-Württemberg und in jedem anderen Bundesland und in der BRD zu hoch. Nach Volkszählungen müssen deshalb die Zahlen immer nach unten korrigiert werden, in Freiburg z.B. von 186 156 am 1.1.1987 auf 178 672 am 25.5.87 (minus 4%). Aber auch bei Volkszählungen rechnet man erfahrungsgemäß mit Fehlern von 1% bis 3%.

4.2 Sie werden – meist – nicht gemessen, sondern berechnet

4.2.1 Berechnung durch Addition

In einer Broschüre der Vereinigung Deutscher Gewässerschutz (1995) wird das Wasservorkommen der Erde durch Addition ermittelt:

Wasser der Weltmeere:	1 321 900 000 km^3
Polareis:	29 180 000 km^3
Grundwasser:	8 595 000 km^3
Oberflächenwasser:	230 000 km^3
Wolken:	13 000 km^3
	– – – – – – – –
Wasser der Erde:	1 359 918 000 km^3

Obwohl man das "Wasser der Weltmeere" nur auf hunderttausend Kubikkilometer genau angegeben hat – die Nullen am Ende sind nicht ernst gemeint und dienen nur der Festlegung der Größenordnung – wird das Endergebnis auf tausend Kubikkilometer genau angegeben. So kann ich auch mein Vermögen auf den Pfennig genau angeben: Mein Haus von rund 500 000 DM, minus Schulden von ... plus Sparkonten ... plus ... minus ... plus dem Inhalt meiner Geldbörse von 52,34 DM ... ergibt exakt 434 897,34 DM.

4.2.2 Berechnung durch Multiplikation/Division

In der oben genannten Broschüre wird auch die Verdunstungsrate der alten BRD mit 54% ermittelt. Man errechnet zunächst die Niederschlagsmenge durch Multiplikation der Fläche der BRD von geschätzten 250 000 km^2 (nach Lexikon 248 601 km^2) mit der "Niederschlagshöhe" von 837 mm. Dabei sind die 837 mm ein langjähriger Durchschnitt, wobei langjährig oft 30 Jahre bedeutet. Da es Trockenjahre mit nur rund 70% der normalen Niederschlagsmenge gibt, schwankt dieser scheinbar exakte Wert auch um ein paar Prozent, je nach dem, wie viele Trockenjahre man zufällig erwischt. Der Wert $837\text{ mm} \cdot 250\,000\text{ km}^2$ wird auf 200 Milliarden m^3 (statt 208 Milliarden m^3) gerundet. Nun berechnet man durch Addition die Verdunstung:

Pflanzen	81	Milliarden m^3
Boden	25	Milliarden m^3
Seen/Flüsse	2,6	Milliarden m^3
	– – –	– – – – – – –
	108,6	Milliarden m^3

Obwohl die obigen Zahlen nur grobe Schätzwerte sind (in trockenen und heißen Sommern z.B. liegt die Verdunstungsrate höher), wird jetzt nur minimal auf 108 Milliarden m^3 gerundet, dann aber exakt gerechnet: 108:200 = 0,54, also ist die Verdunstungsrate 54%!! Walter Krämer (1991) nennt das die Grob-Rein, Fein-Raus-Methode!

Es ist demnach ein wesentliches Unterrichtsziel, den Schülern auch ein Bewußtsein der Problematik solcher Entstehungsgeschichten von Zahlen mitzugeben: Lassen wir sie ab und zu entsprechende Aufgaben selbst zusammenstellen, statt sie ihnen via Lehrbuch vorzusetzen! Dabei stoßen sie dann auch auf das folgende Problem:

5. Welche Definition steckt hinter den Zahlen?

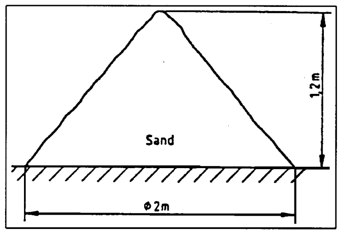
Italien hat 1987 erstmals England im Bruttosozialprodukt überholt und lag hinter USA, Japan, UdSSR, BRD und Frankreich erstmals an sechster Stelle. Dieser Tag ging als "Il sorpasso" (sorpassare = überholen) in die Geschichtsbücher Italiens ein und hob dort das Nationalbewußtsein, während er das der Engländer beschädigte. Was war passiert? Hatte man in Italien Gold gefunden? Oder in die Hände gespuckt und das Bruttosozialprodukt gesteigert? Nein, man vergisst oft eines, wenn man exakte Zahlen vorgesetzt bekommt: Nämlich die Frage, welche Definition dahinter steckt. Das einzige, was sich geändert hatte, war die Definition des italienischen Bruttosozialprodukts (deshalb auch die *"Berichtigung der Berechnungsgrundlage zum Zwecke europäischer Vergleichbarkeit"* s.o.). Während vorher – wie noch heute in Deutschland und vielen Ländern üblich – Schwarzarbeit u.ä. unberücksichtigt bleibt, hatte man nun in Italien die gesamte Schattenwirtschaft mit 5% im Bruttosozialprodukt angesetzt und es so um 5% gesteigert!

Heute schätzt man die Zahl der Analphabeten in der gesamten Bundesrepublik auf zwei bis drei Millionen, nach der letzten Statistik des Kaiserreichs, in der diese Zahl noch aufgeführt wurde (1912), gab es nur vier- bis achttausend Analphabeten. Wie ist das möglich?

Nun, ein Alphabet sollte heute u.a. einen einfachen Text sinnentnehmend lesen und ihn dann unter Berücksichtigung der wesentlichen Regeln der Schriftsprache schriftlich wiedergeben können. 1912 galt dagegen nur der als Analphabet, der seinen Namen nicht schreiben konnte. Denn die Zahlen des Kaiserreichs basieren auf Einträgen in Heiratsurkunden und Rekrutierung von Soldaten. Und es wurden nur die als Analphabeten gezählt, die mit XXX unterschrieben. Sollte man allerdings von einem Alphabeten verlangen, dass er seinen Steuerbescheid lesen könne, dann – so schreibt Peek (1995) – wäre die Analphabetenrate wohl 99,9%.

6. Doch was machen wir in der Schule?

Auch hier führe ich nur zwei Beispiele auf, stellvertretend für viele, die wir alle kennen. Zunächst folgt eine Prüfungsaufgabe zur Hauptschulabschlußprüfung des Berufsvorbereitungsjahrs (für Schüler nach Besuch der Hauptschule ohne Hauptschulabschluß) in Baden-Württemberg des Jahres 1997:



Ein Sandhaufen hat die Form eines Kegels.

Wieviel m³ Sand umfasst der Sandhaufen?

Wie groß ist die Masse des Sandes, wenn 1 dm³ Sand 1,5 kg wiegt?

Abb. 2

Obwohl der Rand des Sandhaufens nicht gradlinig gezeichnet ist und jeder die Ungenauigkeit sieht, wurde im Lösungsvorschlag das Volumen mit 1,256 m^3 angegeben. Woher kommen die Genauigkeit, die Stellen hinter dem Komma? Nun, eine Stelle von der Höhe 1,2 und zwei von π, für das 3,14 eingesetzt wurde. Würde man π mit 10 000 Stellen angeben, hätte das Volumen des Sandhaufens auch 10 000 Stellen hinter dem Komma. (Ich weiß, genau 10001 Stellen.)

Dies habe ich so ironisch hingeschrieben. Und dann schaue ich in den Lösungsvorschlag und traue meinen Augen nicht: Da haben doch die Autoren bei der Berechnung der Masse genau das gemacht!! Sie schreiben zwar zunächst $1256\,\mathrm{dm}^3 \cdot 1,5\,\mathrm{kg/dm}^3$ hin, kommen dann aber auf 1884,956 kg (weil ihr Taschenrechner mit π rechnet und somit zu 1884,9556 kommt), was sie großzügig auf 1885 kg runden! Übrigens – schüttet jemand einen Eimer Wasser auf den Sand, so nimmt dieser das Wasser auf und ist um 10 kg schwerer! Alleine durch Feuchtigkeitsschwankungen ergeben sich größere Gewichtsunterschiede, als die Musterlösung suggeriert.

Das nächste Beispiel entstammt einer Sammlung von Aufgabenvorschlägen des Ministeriums für Kultus und Sport des Landes Baden-Württemberg. Dort heißt es:

Die Anreicherung von CO_2 in der Atmosphäre ist mitverantwortlich für den sogenannten Treibhauseffekt, d.h. für die Erhöhung der mittleren Lufttemperatur. Die jährliche CO_2-Emission E (gemessen in Tonnen Kohlenstoff pro Jahr) nimmt in den letzten Jahren ständig zu.

Trägt man wie in untenstehender Figur den dekadischen Logarithmus (Logarithmus zur Basis 10) von E über der Zeit t (gemessen in Jahren ab 1970) auf, so ergibt sich eine Gerade.

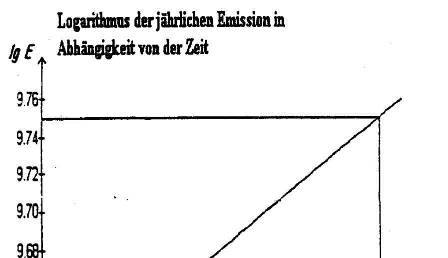
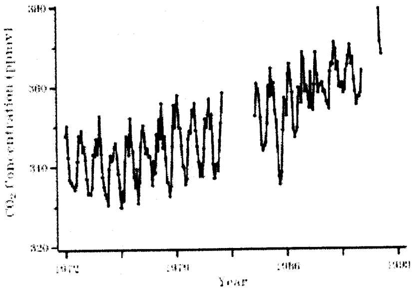
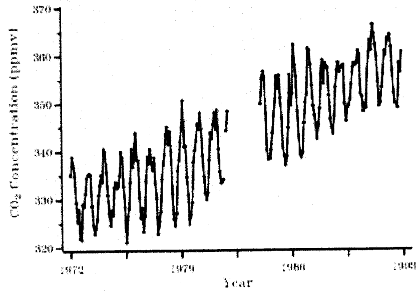


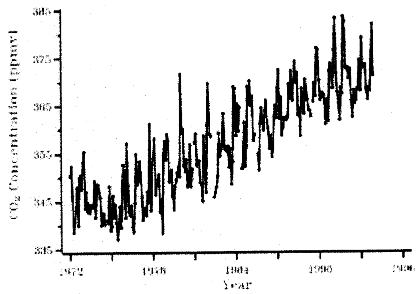
Abb. 3



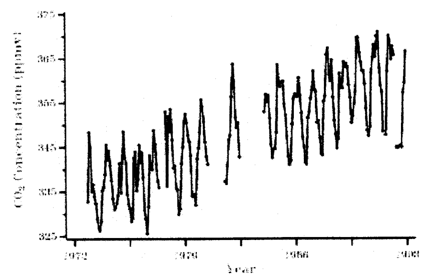
Messstation: Deuselbach



Schauinsland



Waldhof



Westerland

Abb. 4

Wer glaubt den letzten Satz des Textes in Abb. 3? Wie will man z.B. bei den Brandrodungen in Indonesien den Ausstoß messen? Ergibt sich wirklich so ohne weiteres eine Gerade? Lieber Leser, bitte beachten Sie außerdem, wie sich die Herausgeber bemüht haben, die Linie möglichst dünn zu zeichnen, was natürlich exakte Messergebnisse suggeriert. Eine Kollegin hat im Internet echte Messergebnisse gefunden, allerdings wurde hier der CO_2-Gehalt der Luft und nicht der Ausstoß gemessen. Ich füge diese echten Daten ein (Abb.4).

Angesichts dieser Schwankungen, angesichts der Tatsache, dass Messstationen gelegentlich (z.B. wegen Instandsetzung) abgeschaltet werden (fehlende Teile im Diagramm), ist die Behauptung der Gradlinigkeit des logarithmischen Diagramms ein ungeheurer Affront gegenüber den Schülern.

Diese Aufgabe hat, trotz des Geredes von Treibhauseffekt usw., nur einen Zweck, nämlich den, die ganz gewöhnliche reine Mathematik zu machen. Denn es sollen – so lautet der weitere Aufgabentext – Funktionswerte abgelesen und die Funktionsgleichung aufgestellt werden. Mit Hilfe dieser Funktionsgleichung sollen dann die bei Exponentialfunktionen üblichen Fragen beantwortet werden: Wann ist der Funktionswert doppelt so groß wie 1980? Warum ist der Verdopplungszeitraum von der Wahl des Ausgangsjahrs abhängig? Um wieviel Prozent steigt der Funktionswert pro Jahr? Vom Treibhauseffekt ist natürlich nicht mehr die Rede!

7. Und was sollten wir in der Schule machen?

Wie und in welcher Genauigkeit sollte man nun Zahlen angeben?

Man kann die Fehlerschranke explizit angeben. Ein Literaturwert der Gravitationskonstante ist z.B. $(6{,}67259 \pm 0{,}00085) \cdot 10^{-11}$ $m^3/kg\ s^2$, der relative Fehler beträgt also 0,0127%.

Will man diese schwerfällige Schreibweise vermeiden, sollte man die *signifikanten Ziffern* beachten. Die Zahl 1 321 900 000 (Wasser der Weltmeere) hat fünf, die Zahl 0,000 345 drei signifikante Ziffern, denn die folgenden bzw. führenden Nullen dienen nur der Festlegung der Größenordnung. Entsprechend hat die Zahl der Bundesbeschäftigten von 550 000 nur zwei signifikante Ziffern. Will man dagegen behaupten, daß es $55\mathit{0}000$ und nicht $55\mathit{1}\,000$ sind, hätte diese Zahl drei signifikante Ziffern. In diesem Fall empfiehlt sich die Schreibweise $550 \cdot 10^3$, bei der alle signifikanten Ziffern aufgeführt werden, führende oder folgende Nullen aber durch die Exponentialschreibweise entfallen.

Auf Gauss geht die Konvention zurück, dass man nur so viele signifikante Ziffern schreibt, dass der Fehler maximal die Hälfte der letzten signifikanten Zahl ausmacht. In dem Fall 1 321 900 000 (Wasser der Weltmeere) wäre dies $\pm 50\,000$, also nur ein relativer Fehler von genau $5 : 132\,190$ oder rund(!) 0,004%. Glaubt wirklich jemand, dass man die Wassermenge der Weltmeere genauer messen kann als die Gravitationskonstante? (Die zugegebenermaßen eine der ungenauesten Naturkonstanten ist).

Aufgrund der Anfangsziffer und der Anzahl der signifikanten Ziffern kann man den nach der Vorschrift von Gauss prozentualen Fehler (runden!) angeben, wie hier in der Tabelle dargestellt. Hat man z.B. nur die eine signifikante Ziffer 2, dann bedeutet das also $2 \pm 0{,}5$, und wegen $0{,}5 : 2 = 0{,}25$ ist der relative Fehler 25%.

		Anzahl der	signifikanten	Ziffern
		1	2	3
erste	1	50	3	0,3
signi-	2	25	2	0,2
fikante	3	17	1	0,1
Ziffer	4	13	1	0,1
	5	10	0,9	0,09
	6	8	0,7	0,07
	7	7	0,7	0,07
	8	6	0,6	0,06
	9	6	0,5	0,05

relativer Fehler in %

Man tut sich relativ leicht, diesen prozentualen Fehler zu schätzen. Daraus ergibt sich nun umgekehrt, wieviel signifikante Ziffern man verwenden sollte.

Das ist vielleicht zu schwer für das Berufsvorbereitungsjahr und die Berechnung am Sandhaufen (s.o.). Aber ich kann mir vorstellen, wie mein Kollege Georg S., der dort unterrichtet, die Frage stellt: “Na, schätz mal, um wieviel Prozent das Volumen des Sandhaufens schwanken kann! – Hm, 5%? Ein bisschen wenig, findest Du nicht?” Wenn man sich dann auf 10% oder 20% geeinigt hat, können die Schüler diese Schwankung mit rund $0{,}13\,\mathrm{m}^3$ oder $0{,}25\,\mathrm{m}^3$ angeben und werden feststellen, dass die Angabe $1{,}3\,\mathrm{m}^3$ für den Sandhaufen schon zu genau ist. Und sie erfahren, dass mit dem Sandhaufen ein Auto mit einer zulässigen Zuladung von 2 Tonnen u.U. schon überladen ist.

An Gewerbeschulen wird an dieser Stelle auch manchmal das “Doppelt-Rechnen” praktiziert. Gibt man nur die signifikanten Ziffern an, hier etwa die Höhe mit 1,2 m, den Durchmesser mit 2,0 m und die Dichte mit $1{,}5\,\mathrm{kg/dm}^3$, so ergeben sich nach der Regel von Gauss die Bereiche $1,2 \pm 0,05\,\mathrm{m}$, $1{,}2 \pm 0{,}05\,\mathrm{m}$ und $1{,}5 \pm 0{,}05\,\mathrm{kg/dm}^3$. Für die Masse des Sandhaufens erhält man nun

maximal	$1/3 \cdot (3{,}14 \cdot 1{,}025^2 \cdot 1{,}25) \cdot 1{,}55 = 2{,}13\ldots$
und minimal	$1/3 \cdot (3{,}14 \cdot 0{,}975^2 \cdot 1{,}15) \cdot 1{,}45 = 1{,}65\ldots.$

woraus man ersieht, wie gewagt die Angabe von rund 1,9 t ist.

Bei beiden Methoden sehen Schüler, wie ungenau die Berechnung bzw. die Berechnungsgrundlage ist. Auf diese Weise wird ein Bewusstsein für Genauigkeiten erzeugt, was heute leider nicht vorhanden ist.

Beim CO_2-Problem halte ich eine Nicht-Behandlung für allemal besser als eine solch dilettantische wie die oben geschilderte. Wenn man nur anhand eines logarithmischen Diagramms eine Exponentialfunktion ermitteln und mit ihr rechnen will, dann gibt es geeignetere Objekte. Z.B. verlief nach dem mir vorliegenden Zahlenmaterial das Wachstum der Weltbevölkerung in gewissen Phasen in etwa exponentiell.

Ich könnte mir auch vorstellen, dass man nur die obigen echten Diagramme zeigt und daran verdeutlicht, wie groß das Problem einer funktionalen Beschreibung ist. Daran würden die Jugendlichen erkennen, auf welch unsicheren Füßen z.B. Prognosen stehen und über Aussprüche wie “Wenn das Atomkraftwerk Wyhl nicht gebaut wird, gehen in der Region die Lichter aus!” (Hans-Karl Filbinger in den 70er Jahren) schlicht und einfach lachen, womit das Ziel der Emanzipation erreicht wäre.

8. Anmerkungen

[1] Dieses Verhalten ähnelt dem einer Kollegin (Germanistin), die Noten einzelner Klassenarbeiten auf Zehntel genau angab. Die Zeugnisnote berechnete sie dann auf Hundertstel. Ergab sich etwa die “3,45”, bekam der Schüler eine “3”, und bei “3,53” eine “4”. Allerdings sagte sie mir vor kurzem, dass ihr wegen unserer Gespräche über die Genauigkeit von Zahlen erhebliche Zweifel an dieser Praxis gekommen seien. Dass es aber ohne Rückgriff auf die “3,45” bzw. “3,53” sehr viel schwieriger ist, die unterschiedlichen Endnoten für die beiden Schüler zu begründen, ist klar.

[2] In einer Arbeitsgruppe von Mathematikern des Oberschulamts Freiburg äußerte ich Zweifel an der Anzahl von 272 Eiern, die jeder Bundesbürger 1983 durchschnittlich gegessen haben soll. Ein Kollege wies jeden Zweifel zurück: “Wenn es nur ein Ei mehr oder weniger gewesen wäre, dann hätte man sich ja um – äh – ja, 60 Millionen verzählen müssen. Das ist nicht möglich!” Ein Ei mehr oder weniger, das ist ein Unterschied von vier Promill! Dabei lässt sich die Einwohnerzahl vielleicht auf 4 Prozent genau angeben (siehe 4.1)

[3] Ich habe oft nach der Genauigkeit der Zahlen gefragt und erhielt meist verbale Beschreibungen wie die obige. Andere lehnten jede Schätzung ab, da ihnen entsprechende Daten fehlten. Keiner machte eine präzise Angabe der Fehlerschranke. (Ich hatte $\pm 1\%$, 5%, 10% vorgeschlagen.)
Einigen Fachleuten war klar, dass ihre Zahlen nicht genau waren. Sie machten daraus auch keinen Hehl. Es hat mich aber gewundert, dass auch sie ihre Zahlen mit großer Exaktheit angaben. So sprach Herr Kramer vom Deutschen Institut für Wirtschaft davon, dass die Analphabetenrate (weltweit) nur grob geschätzt werden kann, gab sie aber (siehe Kramer 1997, S. 7) mit 24,7% für 1990 und 22,6% für 1995 an.

[4] Übrigens – die Wahl hatte noch ein juristisches Nachspiel, denn sie wurde angefochten. Das Verwaltungsgericht Augsburg hat – wie mir Herr Hötzel mitteilte – die Klage abgewiesen. Allerdings aus dem formalen Grund, dass Beanstandungen, die zur Wahlanfechtung herangezogen werden, innerhalb von 14 Tagen nach der Wahl dargelegt werden müssen. Wie man das machen soll, wenn die endgültige, zubeanstandende Auszählung erst 30 Tage später erfolgt, bleibt das Geheimnis des Gerichts. (Aber Juristen können logisch denken!?)

[5] Man liest immer wieder von solchen Fehlern. Nach der Bundestagswahl 1998 berichtet die Badische Zeitung (30.9.98), dass bei einer Nachzählung der Vorsprung des Göppinger CDU-Direktkandidaten von 19 Stimmen auf 10 schrumpfte. “Doch die Spannung bleibt: Elf jetzt ungeöffnet aufgefundene Wahlbriefe werden am Samstag ausgezählt.”

9. Literatur

Bericht der Bundesregierung: Zur Bekämpfung des Analphabetismus in der Bundesrepublik Deutschland 19/93. – Bonn 1993 (Drucksache 12/5821)

Krämer, Walter (1991): So lügt man mit Statistik. – Frankfurt/M.: Campus

Kramer, Wolfgang (1997): Funktionaler Analphabetismus. – Köln: Deutscher Institutsverlag

Laussermayer, R. (1996): Rechnen mit zwei signifikanten Ziffern (Dispositionsmathematik). – In: Bardy, Danckwerts, Schornstein (Hrsg.), Materialien für einen realitätsbezognenen Mathematikunterricht, Band 3 der ISTRON-Reihe. Bad Salzdetfurth: Franzbecker, S. 36–47

Morgenstern, O. (1973): On the Accuracy of Economic Observations. – Princeton: Princeton University Press, 2. Aufl.

Peek, R. (1995): Funktionaler Analphabetismus in modernen Industriestaaten. – In: Bertelsmann Briefe H. 133, S. 68–70

Vereinigung Deutscher Gewässerschutz (1995): Naturstoff Wasser. – Bonn (Schriftenreihe der Vereinigung Deutscher Gewässerschutz; Band 37), 3. Auflage

Autor

Schornstein, Johannes, Wüstgasse 8, D-79295 Laufen.
E-mail: schornst@gks.fr.bw.schule.de