FORMAS NORMALES SIMPLIFICADAS PARA EQUILIBRIOS NO HIPERBÓLICOS EN $\mathbb{R}^3$.

E. Gamero, E. Freire, A.J. Rodríguez–Luis, A. Algaba

Departamento de Matemática Aplicada II, Universidad de Sevilla,
E.S.Ingenieros, Avda Reina Mercedes s/n, 41012 Sevilla.

Abstract. Hypernormal forms for linear degeneracies corresponding to a zero and a pair of pure imaginary eigenvalues (Hopf-zero) and also to a triple zero eigenvalue with geometric multiplicity one are considered. An unfolding of the hypernormal form of the triple zero degeneracy is analyzed. The existence of a curve of codimension two heteroclinic connections (T–points) from the triple zero point in the parameter space is pointed out.

1. Formas hipernormales para las degeneraciones Hopf–cero y triple cero.

Consideramos en primer lugar el estudio de formas hipernormales para sistemas dinámicos tridimensionales cuyas partes lineales presentan degeneraciones correspondientes a un par de autovalores imaginarios puros y un tercer autovalor cero (degeneración lineal de tipo Hopf–cero) o bien correspondientes a un autovalor cero triple (degeneración triple cero) en el caso de multiplicidad geométrica uno. Un estudio parcial de este problema se encuentra en [2], [3] y [10]. En los dos primeros trabajos se presentan algoritmos de computación simbólica para la obtención de los coeficientes de dichas formas hipernormales mediante $\mathcal{C}^\infty$–conjugación, es decir, mediante cambios en las variables de estado.

Aquí consideramos además otro tipo de simplificaciones: aquellas obtenidas mediante $\mathcal{C}^\infty$–equivalencia (permitiendo además cambios en el tiempo dependientes de las variables de estado).

Partimos del sistema:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{1}$$

donde A es una matriz 3x3 que tiene autovalores $\pm\omega_0 i, 0$, o bien un autovalor cero con multiplicidad geométrica uno; y f, g, h contienen los términos no lineales.

1.1 Degeneración Hopf–cero.

En el primer caso, realizando si es preciso un cambio lineal, escribimos el sistema en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & \\ \omega_0 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{2}$$

Una forma normal a tercer orden para este sistema, escrita en coordenadas cilíndricas, $x = r\cos\theta, y = r\,\mathrm{sen}\,\theta, z = z$, viene dada por

$$\begin{array}{rcl} \dot{r} & = & a_1 rz + a_2 rz^2 + a_3 r^3 + \cdots \\ \dot{\theta} & = & \omega_0 + b_1 z + b_2 r^2 + b_3 z^2 + \cdots \\ \dot{z} & = & c_1 r^2 + c_2 z^2 + c_3 r^2 z + c_4 z^3 + \cdots \end{array} \tag{3}$$

En [2], [10] se demuestra que, en las hipótesis $c_1 \neq 0, a_1 \neq 0, a_2 \neq 0, c_2 \neq 0, 2a_1 - c_2 \neq 0$, una forma hipernormal a quinto orden para (2) es

$$\begin{array}{rcl} \dot{r} & = & A_1 rz + A_2 rz^2 + A_3 r^5 + \cdots \\ \dot{\theta} & = & \omega_0 + B_1 z + B_2 z^2 + B_3 r^4 + \cdots \\ \dot{z} & = & C_1 r^2 + C_2 z^2 + C_3 z^3 + C_4 z^4 + \cdots \end{array} \tag{4}$$

Este resultado se puede generalizar hasta un orden arbitrario: los monomios de grado k $(k \geq 5)$ que aparecen en la forma normal son:

$$\begin{array}{rcl} \dot{r} & \longrightarrow & rz^{k-1}; r^3 z^{k-3}; r^5 z^{k-5}; \ldots ; r^k \text{ (si } k \text{ es impar), o bien } r^{k-1}z \text{ (si } k \text{ es par)} \\ \dot{\theta} & \longrightarrow & z^{k-1}; r^2 z^{k-3}; r^4 z^{k-5}; \ldots ; r^{k-1} \text{ (si } k \text{ es impar), o bien } r^{k-2}z \text{ (si } k \text{ es par)} \\ \dot{z} & \longrightarrow & z^k; r^2 z^{k-2}; r^4 z^{k-4}; \ldots ; r^{k-1}z \text{ (si } k \text{ es impar), o bien } r^k \text{ (si } k \text{ es par)} \end{array}$$

Mostramos a continuación los monomios de grado k que aparecen, genéricamente, en la forma hipernormal:

$$\begin{array}{rcl} \dot{r} & \longrightarrow & r^k \quad \text{(si } k \text{ es impar)} \\ \dot{\theta} & \longrightarrow & r^{k-1} \quad \text{(si } k \text{ es impar)} \\ \dot{z} & \longrightarrow & r^k \quad \text{(si } k \text{ es par)} \end{array}$$

Si consideramos además la posibilidad de reparametrizar el tiempo en función de las variables de estado ($\mathcal{C}^\infty$–equivalencia), podemos transformar (2) de forma genérica en un sistema en el que aparezcan exclusivamente los siguientes monomios:

$$\begin{array}{rcl} \dot{r} & \longrightarrow & rz;\ r^k \quad (k = 3, 5, 7, \ldots) \\ \dot{\theta} & \longrightarrow & 1;\ r^k \quad (k = 2, 4, 6, \ldots) \\ \dot{z} & \longrightarrow & r^2;\ z^2;\ z^3;\ z^4 \end{array}$$

1.2 Degeneración triple cero.

En el segundo caso, correspondiente a un autovalor cero triple con multiplicidad geométrica uno, es posible escribir el sistema en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Para este sistema, una forma normal a tercer orden es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= a_1xz + a_2xy + a_3x^2 + a_4y^2 + b_1xz^2 + b_2x^2y + b_3x^3 + b_4x^2z + b_5y^3 + b_6xy^2 + \cdots \end{aligned} \tag{6}$$

Una forma hipernormal a tercer orden para (5), en la hipótesis $a_3 \neq 0$, viene dada por (vid. [3], [10]):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= A_1xz + A_2xy + A_3x^2 + B_1xz^2 + B_2x^2y + B_3x^3 + \cdots \end{aligned} \tag{7}$$

Usando además $\mathcal{C}^\infty$–equivalencia, y suponiendo que A_1, A_2, A_3 son distintos de cero, podemos simplificar aún más el sistema, eliminando el monomio x^3 en (7):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= A_1xz + A_2xy + A_3x^2 + B_1xz^2 + B_2x^2y + \cdots \end{aligned} \tag{8}$$

En [6] se estudia la determinación del tipo topológico para este sistema.

2. Despliegue de la degeneración triple cero.

Pasamos a continuación a estudiar el despliegue del sistema anterior truncado a cuarto orden, dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= \mu_1 + \mu_2y + \mu_3z + A_1xz + A_2xy + A_3x^2 + B_1xz^2 + B_2x^2y \end{aligned} \tag{9}$$

Un estudio de este despliegue, en el caso degenerado $A_3 = 0$ aparece asimismo en [6].

Considerando el escalado de las variables temporal y de estados dado por

$$t \longrightarrow \omega t, \; x \longrightarrow \alpha x, \; y \longrightarrow \beta y, \; z \longrightarrow \gamma z$$

siendo

$$\omega = -\frac{2A_3}{A_2}, \; \alpha = \frac{4A_3^2}{A_2^3}, \; \beta = -\frac{8A_3^3}{A_2^4}, \; \gamma = \frac{16A_3^4}{A_2^5}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= z \\ \dot{z} &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 y + \varepsilon_3 z + axz + xy - \frac{x^2}{2} + b_1 x z^2 + b_2 x^2 y \end{aligned} \tag{10}$$

Omitimos aquí por brevedad el estudio de las degeneraciones locales de codimensión uno y dos de este sistema (silla–nodo de equilibrios, Hopf, Takens–Bogdanov, Hopf–cero) y nos centramos en la búsqueda de un sistema que nos proporcione información acerca de conductas globales.

Para ello, consideremos el *blowing up* dado por

$$x = \varepsilon^{\alpha_1} X, \; y = \varepsilon^{\alpha_2} Y, \; z = \varepsilon^{\alpha_3} Z$$

$$T = \varepsilon^{\beta} X$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon^{\gamma_1} c, \; \varepsilon_2 = \varepsilon^{\gamma_2} \lambda, \; \varepsilon_3 = \varepsilon^{\gamma_3} \mu$$

donde $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 4, \alpha_3 = 5, \beta = 1, \gamma_1 = 6, \gamma_2 = 2, \gamma_3 = 2$. De esta forma obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Y \\ \dot{Y} &= Z \\ \dot{Z} &= c + \lambda Y - \frac{X^2}{2} + \varepsilon(\mu Z + XY) + \varepsilon^2 aXZ + \varepsilon^4 b_2 X^2 Y + \varepsilon^7 b_1 X Z^2 \end{aligned} \tag{11}$$

Este sistema, para $\lambda = -1$, resulta ser una perturbación del de Kuramoto–Sivashinsky (vid. [7], [8]):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Y \\ \dot{Y} &= Z \\ \dot{Z} &= c - Y - \frac{X^2}{2} \end{aligned} \tag{12}$$

Entre sus propiedades más notables se encuentran las siguientes:

- Es reversible, es decir, es invariante al cambio $X \longrightarrow -X, Z \longrightarrow -Z, T \longrightarrow -T$.
- Tiene divergencia cero y, por tanto, preserva el volumen.
- Para $c < 0$ no tiene equilibrios.

  Posee un único equilibrio en el origen para $c = 0$.

  Tiene dos equilibrios para $c > 0$: $\left(\pm\sqrt{2c}, 0, 0\right)$.
- Presenta una degeneración lineal de tipo Hopf–cero para el valor del parámetro $c = 0$.
- Para $c > 0$, el equilibrio $\left(\sqrt{2c}, 0, 0\right)$ tiene una variedad estable unidimensional y una variedad inestable bidimensional; mientras que el equilibrio $\left(-\sqrt{2c}, 0, 0\right)$ tiene una variedad estable bidimensional y una variedad inestable unidimensional.

Para estudiar la degeneración Hopf–cero que se da para $c = 0$, realizamos el cambio lineal $X = \overline{y} + \overline{z}, Y = \overline{x} + c, z = -\overline{y}$, con el que obtenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{\overline{x}} \\ \dot{\overline{y}} \\ \dot{\overline{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} - \frac{(\overline{y} + \overline{z})^2}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Para $c = 0$, la forma hipernormal (4) a segundo orden en coordenadas cilíndricas viene dada por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{2} r \overline{z} + \cdots \\ \dot{\theta} &= 1 + \frac{19}{48} \overline{z}^2 + \cdots \\ \dot{z} &= -\frac{1}{4} r^2 - \frac{1}{2} \overline{z}^2 + \cdots \end{aligned} \tag{14}$$

Incluyendo el parámetro c y eliminando la componente azimutal, obtenemos la familia

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \frac{1}{2} r \overline{z} + \cdots \\ \dot{\overline{z}} &= c - \frac{1}{4} r^2 - \frac{1}{2} \overline{z}^2 + \cdots \end{aligned} \tag{15}$$

de cuyo estudio obtenemos (vid. [5]):

- Para $c < 0$ no tiene equilibrios.

- Posee un único equilibrio en el origen para $c = 0$.

- Tiene dos equilibrios para $c > 0$ sobre el eje $\overline{z}$, que se corresponden con los equilibrios de (12), y un tercer equilibrio sobre el eje r rodeado por órbitas periódicas, que en el sistema (12) se corresponde a una órbita periódica rodeada por toros.

En la figura 1 podemos observar una sección con el plano $Z = 0$ del sistema (12) con $c = 0.02$, donde aparecen los equilibrios junto con la órbita periódica y los toros.

En la figura 2 podemos observar la intersección de las variedades bidimensionales de los equilibrios con el plano $Z = 0$, con el típico enredo homoclino. En la siguiente figura aparecen ambas superpuestas. Los puntos de intersección de ambas variedades se corresponden con órbitas heteroclinas entre los equilibrios. Una proyección en el plano XY de una de estas órbitas heteroclinas aparece asimismo en la citada figura.

Otro hecho notable del sistema (12) es la existencia, para ciertos valores del parámetro c, de conexiones heteroclinas fruto de la intersección de las variedades unidimensionales. En la figura 4 aparece representada la proyección en el plano XY de la conexión heteroclina para el valor $c \approx 0.72167954$, para el cual se conoce además de forma explícita la expresión de dicha conexión heteroclina (vid. [8]).

3. Estudio numérico de la degeneración triple cero.

En lo que sigue, y para ilustrar la riqueza de comportamientos dinámicos presentes como consecuencia de la degeneración de triple cero, mostraremos una bifurcación global de codimensión dos cuya existencia se deduce a partir del *blow-up* anterior en el que está presente la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky. Esta bifurcación, denominada *T–point*, aparece al intersectar las variedades estable e inestable (ambas unidimensionales) de los dos equilibrios tipo silla, necesitándose también que exista simultáneamente una intersección de las variedades inestable y estable (ambas bidimensionales) de dichos equilibrios tipo silla para tener así un ciclo homoclino. Esta bifurcación la analizan Glendinning y Sparrow en [4] para el sistema de Lorenz.

Un estudio análogo al llevado a cabo en [4] y la continuación numérica de las homoclinas de ambos equilibrios (mediante el programa AUTO94 [1]) nos confirma que de este punto del plano de parámetros ε_1–ε_3 (fijando ε_2) surge un par de curvas de homoclinas –una correspondiente a cada equilibrio– en forma espiral al ser los equilibrios del tipo silla–foco.

En la figura 5 aparece un detalle del conjunto de bifurcaciones alrededor del *T–point* en el que se aprecian las dos curvas espirales de homoclinas. Asimismo aparece la proyección del ciclo homoclino (*T–point*) en el plano XY (etiqueta 3 del dibujo). La evolución de las homoclinas sobre las curvas espirales que parten del *T–point* aparecen en las figuras 6 (para el equilibrio derecho) y 7 (para el izquierdo). Es precisamente mediante el acercamiento en espiral en el plano de parámetros cómo la homoclina de cada uno de los equilibrios va *tomando la forma* del *T–point* (acercándose en el espacio de fases al otro equilibrio silla-foco).

Finalmente, en la figura 8, mostramos la proyección sobre el plano ε_1–ε_2 de la curva de *T–points* en el espacio tridimensional de parámetros. La curva continua ha sido obtenida numéricamente usando un método de marcado carácter geométrico (análogo al desarrollado en [9]), mientras que la punteada corresponde a la aproximación obtenida mediante el método de Melnikov.

Agradecimientos
Los autores agradecen a la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía la financiación parcial de este trabajo.

Referencias

[1] Doedel, E.; Wang, X., *Auto 94: Software for Continuation and Bifurcation Problems in ODE*, Applied Mathematics Report, California Institute of Technology (1995).

[2] Gamero, E.; Freire, E.; Rodríguez Luis, A.J., *Hopf-Zero Bifurcation: Normal Form Calculation and Application to an Electronic Oscillator*, Proceedings of Equadiff 91, C. Perelló et alii (eds.), Vol. 2, 517–524, World Scientific (1993).

[3] Gamero, E.; Freire, E.; Rodríguez Luis, A.J.; Ponce E.; Algaba, A., *Hypernormal Form Calculation for Triple Zero Degeneracies*, aceptada su publicación en la Serie A del Bulletin de la Societé Mathematique de Belgique.

[4] Glendinning, P.; Sparrow, C., *T–Points: A Codimension Two Heteroclinic Bifurcation*, Journal of Statistical Physics, **43**, 479–488 (1986).

[5] Guckenheimer, J.; Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields,* Appl. Math. Sci. Series, vol. 42, Springer–Verlag (1983).

[6] Ibáñez, S., *Singularidades Nilpotentes de Campos Vectoriales en* $\mathbb{R}^3$., Tesis Doctoral, Univ. de Oviedo (1994).

[7] Kent, P.; Elgin, J., *Noose Bifurcation of Periodic Orbits*, Nonlinearity **4**, 1045–1061 (1991).

[8] Michelson, D., *Steady Solutions of the Kuramoto-Sivashinsky Equation*, Physica 19D, 89–111 (1986).

[9] Rodríguez–Luis, A. J.; Freire, E.; Ponce, E. *A Method for Homoclinic and Heteroclinic Continuation in Two and Three Dimensions*, en *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications*, Eds. D. Roose *et alii*, NATO ASI Series, Series C, Vol. 313, 197–210 (1990).

[10] Ushiki, S., *Normal Forms for Singularities of Vector Fields*, Japan Journal of Applieds Mathematics, **1**, 1–37 (1984).

Figura 1

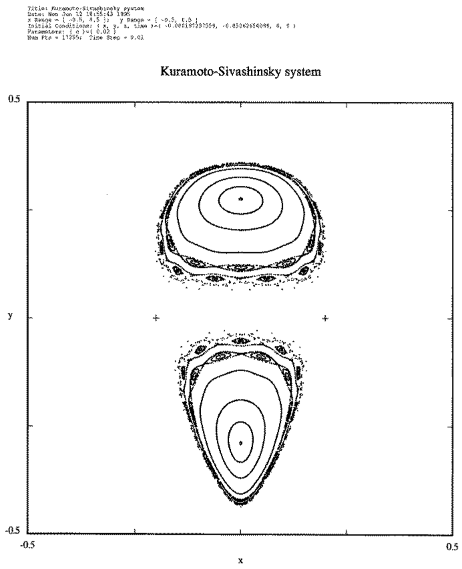


Figura 2

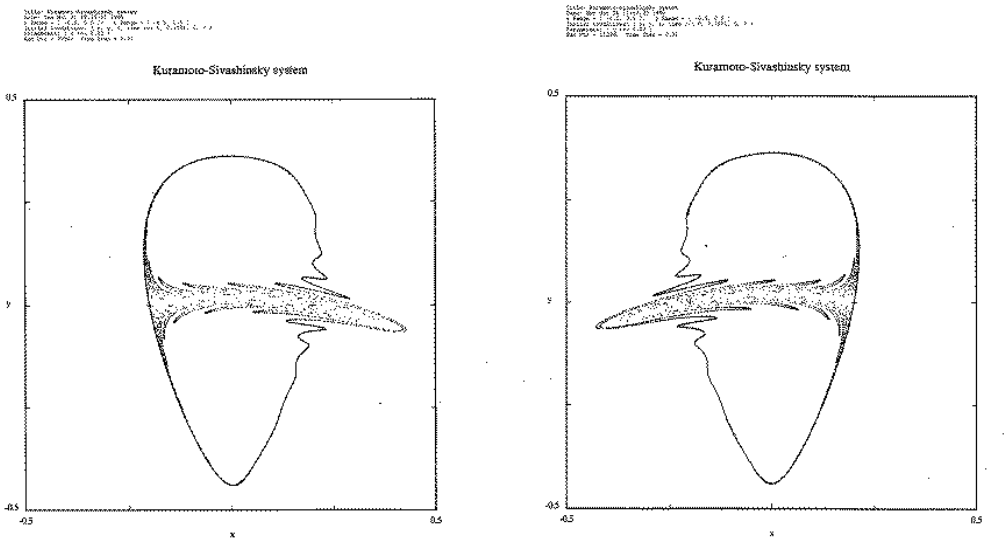


Figura 3

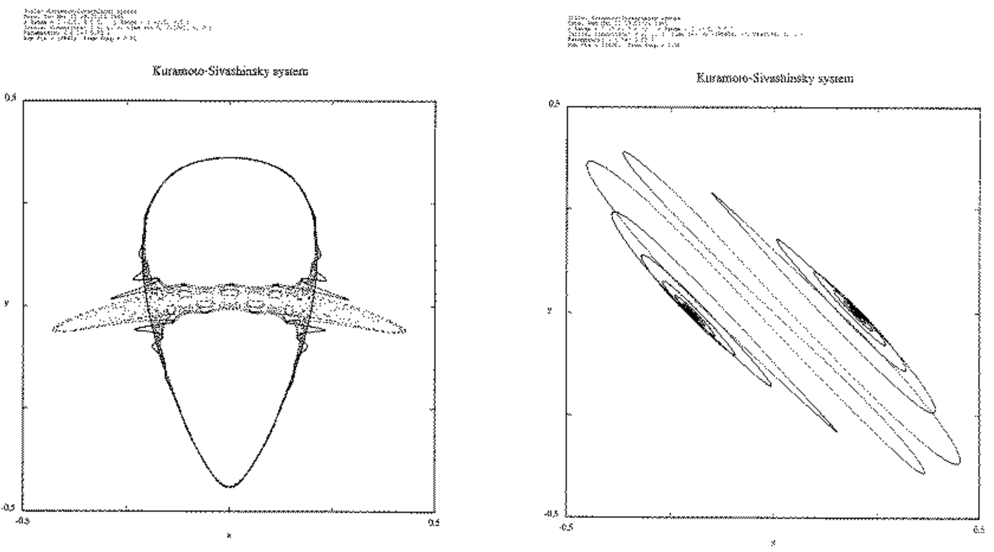


Figura 4

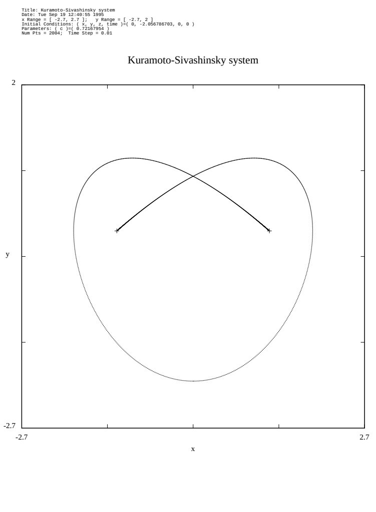
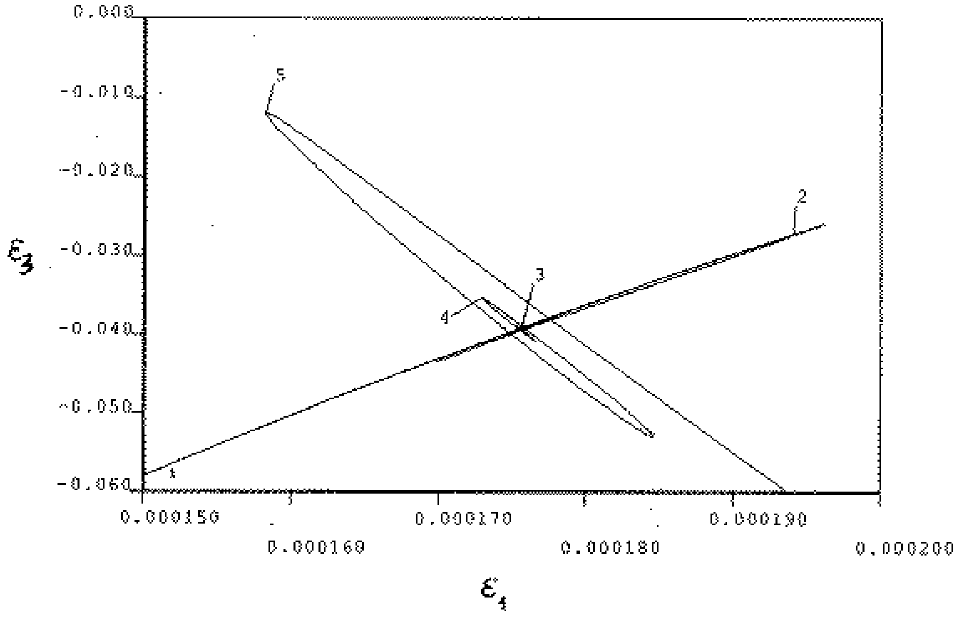


Figura 5


0.000
-0.010
-0.020
-0.030
-0.040
-0.050
-0.060
ε_3
0.000150
0.000160
0.000170
0.000180
0.000190
0.000200
ε_1
1
2
3
4
5

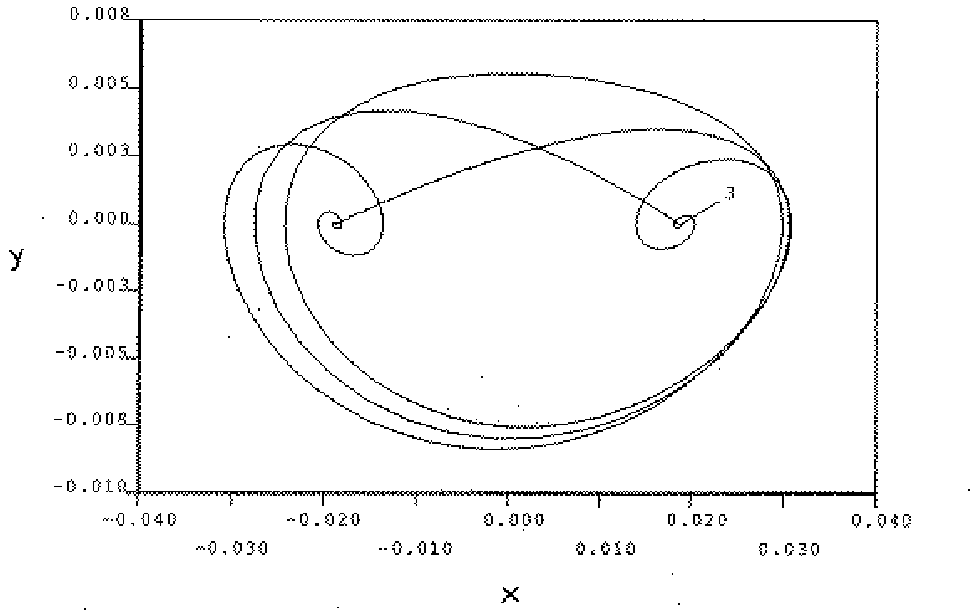
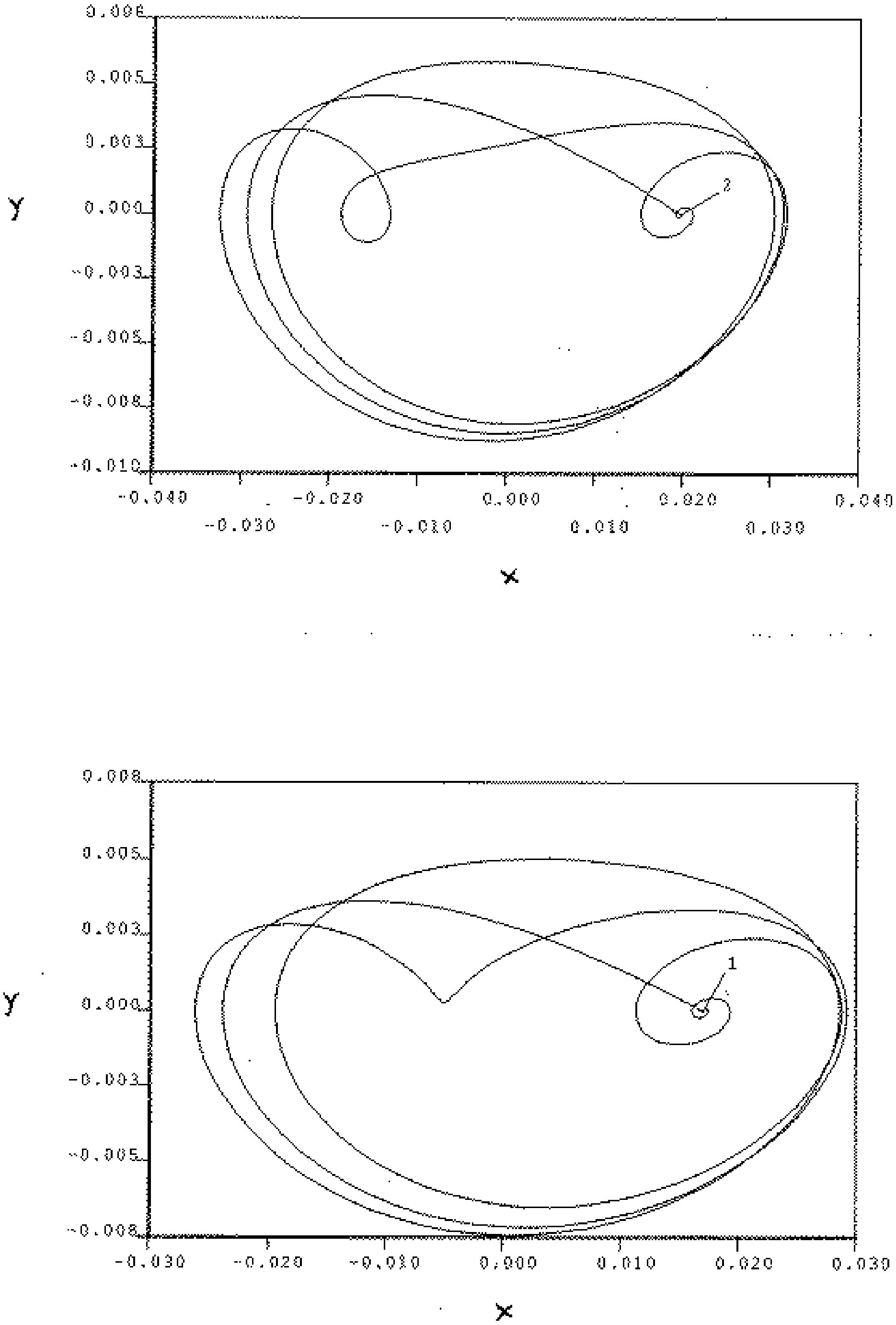
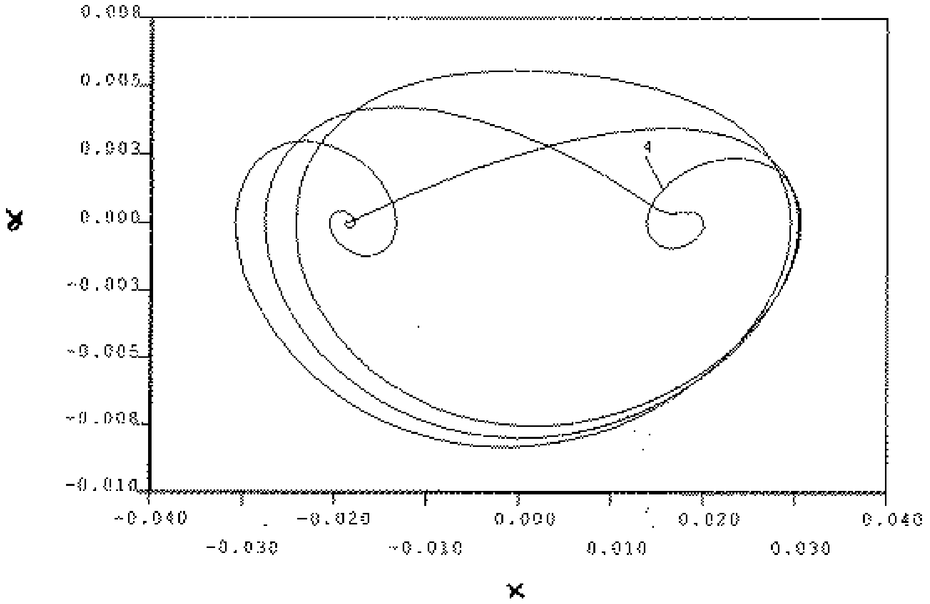

0.008
0.005
0.003
0.000
-0.003
-0.005
-0.008
-0.010
y
-0.040
-0.030
-0.020
-0.010
0.000
0.010
0.020
0.030
0.040
x
3

Figura 6

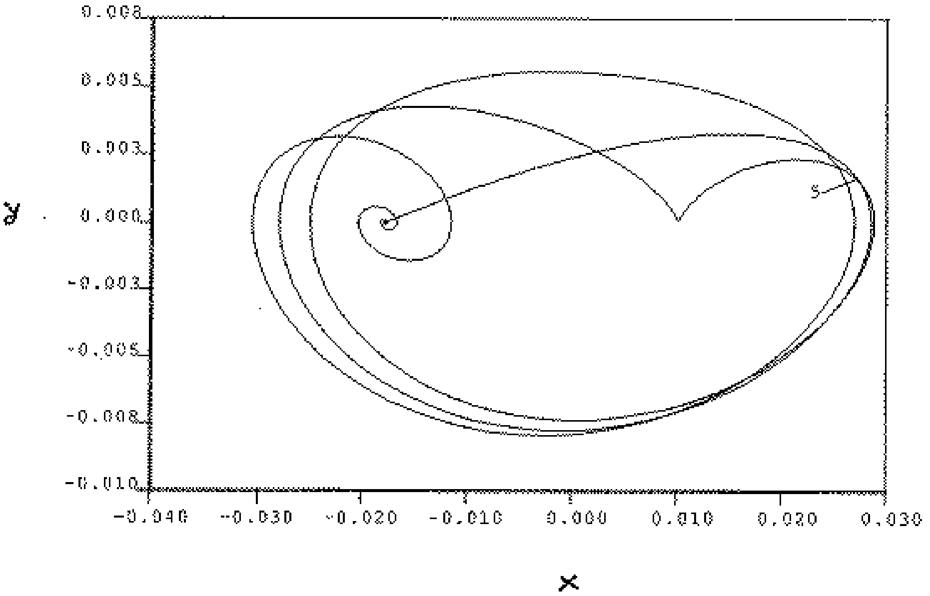


0.008
0.005
0.003
0.000
-0.003
-0.005
-0.008
-0.010
Y
2
-0.040
-0.020
0.000
0.020
0.040
-0.030
-0.010
0.010
0.030
X
0.008
0.005
0.003
0.000
-0.003
-0.005
-0.008
Y
1
-0.030
-0.020
-0.010
0.000
0.010
0.020
0.030
X

Figura 7



0.008
0.005
0.003
0.000
-0.003
-0.005
-0.008
-0.010
y
-0.040
-0.030
-0.020
-0.010
0.000
0.010
0.020
0.030
0.040
x
4



0.008
0.005
0.003
0.000
-0.003
-0.005
-0.008
-0.010
y
-0.040
-0.030
-0.020
-0.010
0.000
0.010
0.020
0.030
x
5

Figura 8