FILTROS NO LINEALES APLICADOS A PROBLEMAS HIPERBÓLICOS CON TÉRMINO FUENTE RÍGIDO

Martínez, V. y Momparler, J.C.

Departament de Matemátiques, Universitat Jaume I, Campus de Penyeta Roja, 12071 Castelló.

Introducción

Es conocido que en las ecuaciones en derivadas parciales hiperbólicas con término fuente rígido, en el sentido de las ecuaciones diferenciales ordinarias, las discontinuidades no se mueven con la velocidad correcta al resolver numéricamente la ecuación , como muestran los trabajos de Le Veque y Yee [2] o de Sjogreen y Engquist [1].

En el caso que de la rigidez proceda del término fuente, el motivo fundamental por el cual se produce este desfase en la velocidad, lo ocasiona la introducción de varios puntos en la representación de la discontinuidad que realiza cualquier esquema numérico que se utilize. Sobre estos puntos que corresponden a la solución numérica y no a la solución análitica, el esquema al evaluar el término fuente produce fuertes oscilaciones que nos impiden resolver el problema correctamente, ocasionando de este modo el desfase en la velocidad con que se mueve la solución.

Por otra parte es conocido que el uso de filtros no lineales suprime oscilaciones numéricas, como puede verse en los trabajos de Sjogreen, Engquist y Lotstedt [3] de Shyy, Chen, Mittal y Udaykumar [4] y de Lafon y Osher [8]. Estos filtros deben tener la propiedad de afectar lo menos posible a los puntos que estén próximos a la solución analítica.

En este trabajo, se utilizan este tipo de filtros, pero no sobre la solución numérica del problema que es lo habitual, sino sobre el término fuente en cada iteración, de forma que se reduzcan o se eliminen las oscilaciones debidas a la evaluación del término fuente en los puntos de difusión numérica de la solución.

Utilizaremos el filtro 1 de [3], pero añadiendo condiciones para que sea más efectivo. Sabemos que la mayoría de los esquemas numéricos introducen uno o dos puntos de difusión numérica para representar la discontinuidad de la solución, estos puntos dan lugar a una situación de extremos muy característica en este tipo de problemas. Por tanto, el filtro deberá contemplar esta situación para ser más efectivo. (Sjogreen y Engquist resuelven esta situación extrapolando con ENO el término fuente de la parte más fiable [7]).

Diseño del filtro

Basándonos en la idea comentada anteriormente sobre los filtros, nuestro objetivo es el diseño de un filtro no lineal que actue sobre el término fuente.

El algoritmo del filtro utilizado por Sjogreen y Engquist es el siguiente:

definimos $\triangle_{\pm} u_j = \pm(u_{j\pm1} - u_j)$

for $j := 2$ to $N-1$ do

if $(\triangle_+ u_j)(\triangle_- u_j) < 0$ then

if $\mid \triangle_+ u_j \mid > \mid \triangle_+ u_j \mid$ then

$\delta_+ := \mid \triangle_+ u_j \mid$

$\delta_- := \mid \triangle_- u_j \mid$

$jcorr := j+1$

else

$\delta_+ := \mid \triangle_- u_j \mid$

$\delta_- := \mid \triangle_+ u_j \mid$

$jcorr := j-1$

endif

$\delta := min(\delta_-, \delta_+/2)$

$s := sgn(\triangle_+ u_j)$

$u_j := u_j + s\delta$

$u_{jcorr} := u_{jcorr} - s\delta$

endif

endfor

En este trabajo, hemos añadido la condición de extremo:

for $j := 2$ to $N-1$ do

if $(\triangle_+ u_j)(\triangle_- u_j) < 0$ then

if $\mid (u_{j+1} - u_{j-1} \mid < tol1$ then

if $\mid (u_{j+1} - u_{j+2} \mid < tol2$ and $\mid (u_{j-1} - u_{j-2} \mid < tol2$ then

$u_j := 0.5 * (u_{j+1} + u_{j-1})$

endif

endif

endif

endfor

En esta condición, se ha considerado la media aritmética, pero se pueden valorar otras soluciones, como extrapolar de la parte que tenga menos variación o utilizar la misma técnica que los "upwind" para extrapolar de la parte más fiable, etc.

Resultados Numéricos

Para testear la eficiencia del filtro, lo aplicamos al problema que aparece en [2], que se suele tomar como modelo de esta situación y que detallamos a continuación:

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= \psi(u), \\ \psi(u) &= -\mu u(u-1)(u-1/2). \end{aligned}$$

Está es una ecuación lineal de avección con término fuente rígido para amplios valores de μ. En particular la solución de este problema con dato inicial:

$$u(x,0) = \begin{cases} 1\ , & x < x_0, \\ 0\ , & x > x_0, \end{cases}$$

es simplemente la función: $u(x,t) = u(x-t,0)$.

El esquema utilizado es del tipo Lax-Friedrichs, ya que este tipo de métodos conservan mejor la velocidad en las discontinuidades que los tipo "upwind". Hemos descompuesto el flujo siguiendo las ideas de Shu y Osher en [6] y hemos reconstruido los flujos utilizando el algoritmo LHHR de Antonio Marquina [5], el esquema resultante es de $orden 2$.

No entraremos aquí a valorar cual es el mejor tratamiento para el término fuente, por lo tanto, tomaremos la expresión $k * \psi(u_j^n)$, que es la más simple para tratar este tipo de situaciones.

En este trabajo, nos proponemos justificar que el uso de filtros puede ser efectivo para tratar este tipo de problemas.

En la $figura\, 1$ podemos ver como actua el filtro de Sjogreen y Engquist sobre una supuesta situación oscilatoria común es este tipo de problemas y en la $figura\, 2$ como actua el filtro añadiendo la condición de extremo.

Sobre el problema tipo, mencionado anteriormente, con las condiciones $\mu = 200$, $x_0 = 0.3$, y $t = 0.3$, y para un método Lax-Friedrichs de $orden\, 2$, se puede comparar la situación sin filtro de la $figura\, 3$ y la situación con filtro de la $figura\, 4$.

Conclusiones

(1) Hay que aclarar que estamos trabajando con un problema tipo, donde el término fuente es idénticamente nulo, por simplicidad no hemos entrado a valorar la variación que se debe permitir en los extremos, sin embargo, creemos que esta variación dependerá del coeficiente de rigidez y de la suavidad del término fuente entre otros factores.

(2) Evidentemente aplicar el filtro sobre el término fuente no resuelve el problema para coeficientes de rigidez altos, pero en determinados casos puede ayudar a su tratamiento.

(3) Sjogreen y Engquist utilizan en el $algoritmo\, 2$ de [3] filtros más sofisticados, que tienen en cuenta, el incremento de variación , respecto a la solución en el paso del tiempo anterior, lo cual permite definir unas funciones admisibles que nos indique cuando hay que consentir un extremo relativo. Esto se puede incorporar a nuestro filtro, sin embargo hay que tener en cuenta que el término fuente es mucho más inestable que

la solución, y por tanto el término fuente en el paso anterior puede que no sea tan fiable. También tienen en cuenta lo que ellos definen como platos en [3] que también prodríamos considerar en nuestro caso.

Prespectivas

En la actualidad estamos analizando el $algoritmo2$ de [3], que tiene en cuenta el término fuente en el paso anterior del tiempo y considera los puntos repetidos que tienen igual valor (platos), tratando todos estos puntos de forma conjunta complicando bastante los cálculos.

Se podrían estudiar con más detalle los beneficios que aportan los filtros, algunos de los esbozos numéricos que hemos realizado vienen en las $figuras$ 5 y 6.

Bibliografía

[1] Sjogreen, B. and Engquist, B.: Numerical Approximation of Hyperbolic Conservation Laws with Stiff Terms, Upssala UCLA (1990).

[2] Le Veque, R.J. and Yee, H.C.: A Study of Numerical Methods for Hyperbolic Conservation Laws with Stiff Source Terms, J. Comp. Phys., Vol. 86, pp187-210, (1990).

[3] Engquist, B.; Lotstedt, P. and Sjogreen, B.: Nonlinear Filters for Efficient Shock Computation, Math. Comput., Vol. 52, pp509-537, (1989).

[4] Shyyi, W.; Chen, M.H.; Mittal, R. and Udaykumar, H.S.: On the Suppression of Numerical Oscillations Using a Non-Linear Filter, J. Comp. Phys., Vol. 102, pp49-62, (1992).

[5] Marquina, A.: Local piecewise hiperbolic reconstruction of numerical fluxes for nonlinear scalar conservation laws, SIAMJ. Sci. COMPUT. , Vol. 15,No. 4,pp 892-915, July (1994).

[6] Shu,C. W.; Osher, O. Efficient Implimentation of Essentially Non-oscillatory Shock Capturing Schemes , J. Comp. Phys., Vol. 77, pp439-471, (1988).

[7] Engquist,B.; Sjogreen,B. Robust Difference Approximations of Stiff Inviscid Detonation Waves CAM Report 91-03, UCLA March 1991

[8] Lafon F.;Osher S. High order filtering methods for approximating hyperbolic systems of conservation laws , ICASE Report, 80-25,1990

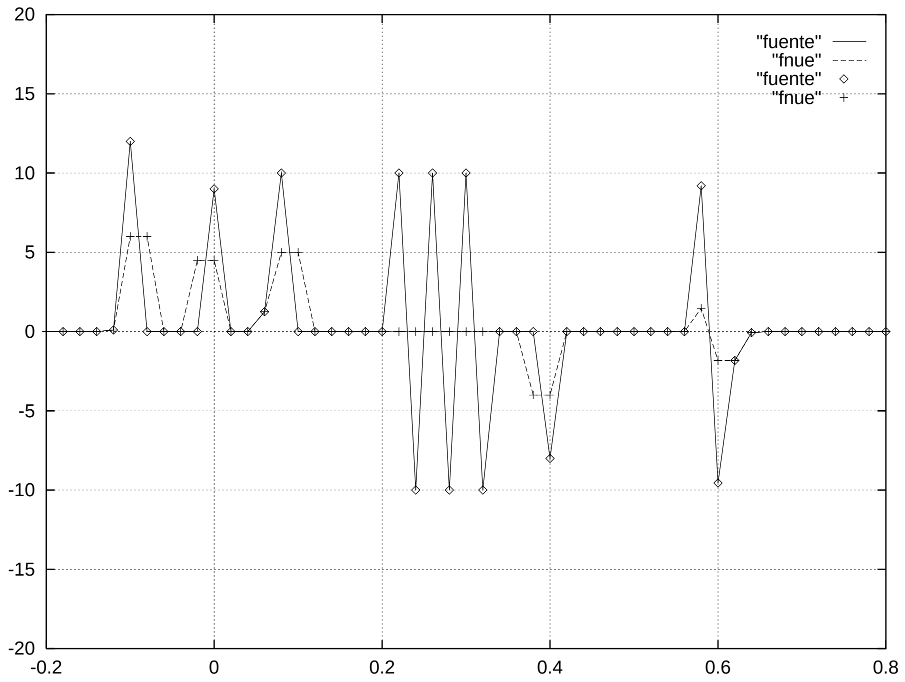

Figura 1: algoritmo 1

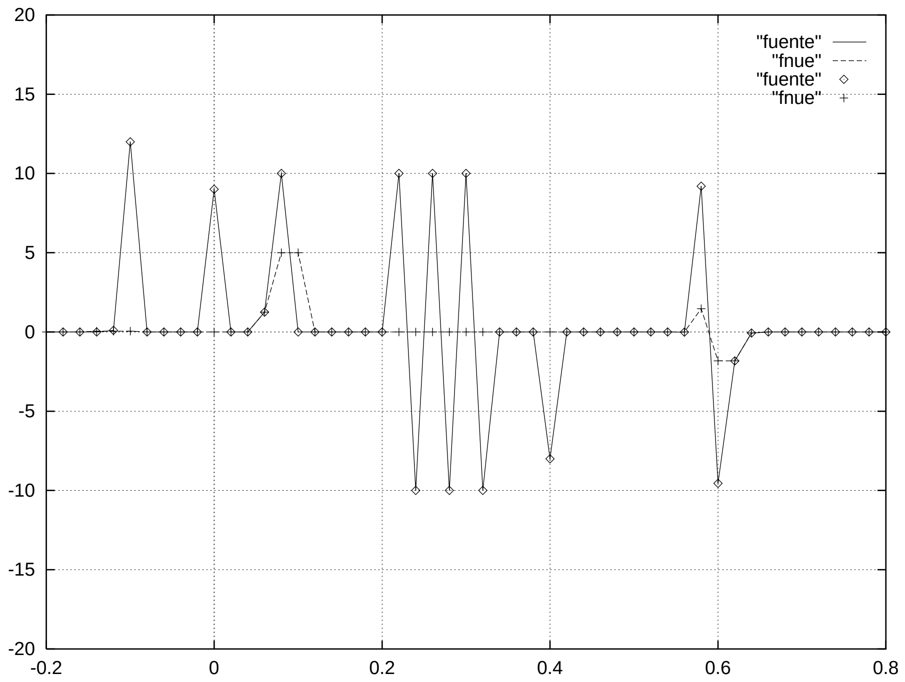

Figura 2: algoritmo 1 modificado

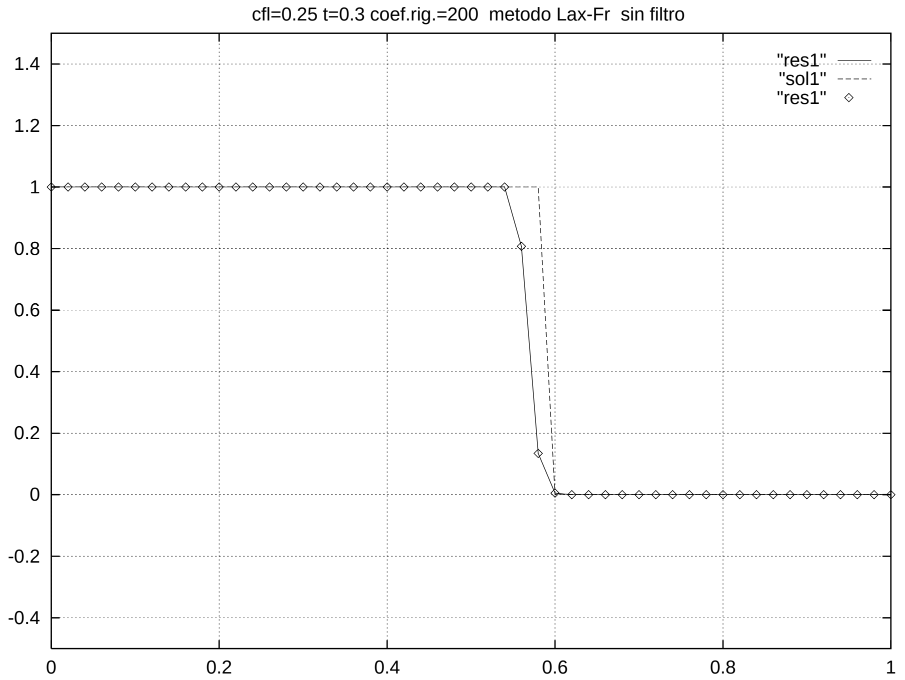

Figura 3: $L_1 - error = 2.12768 \cdot 10^{-2}$

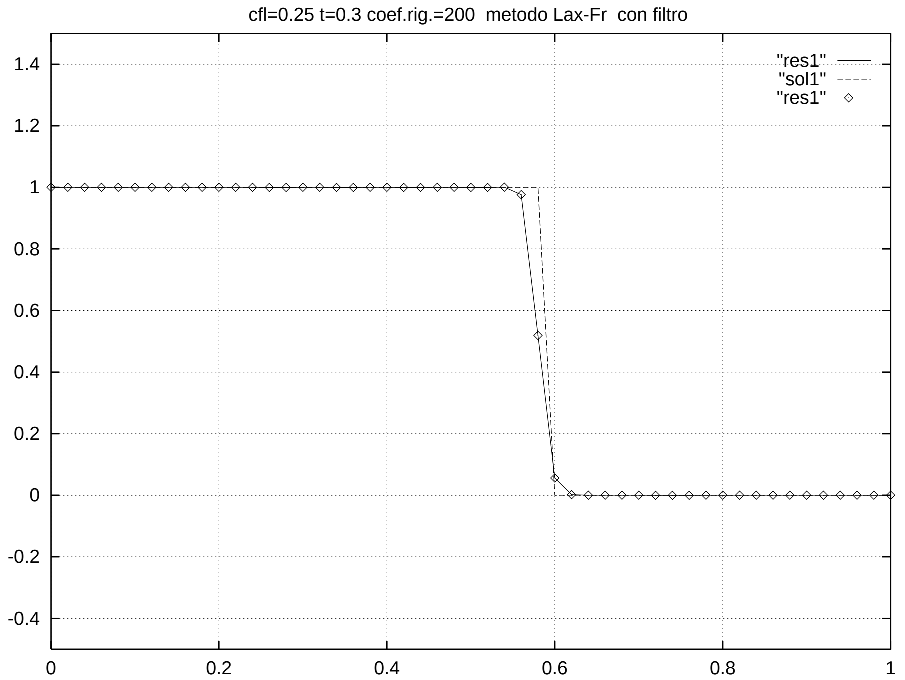

Figura 4: $L_1 - error = 1.12650 \cdot 10^{-2}$

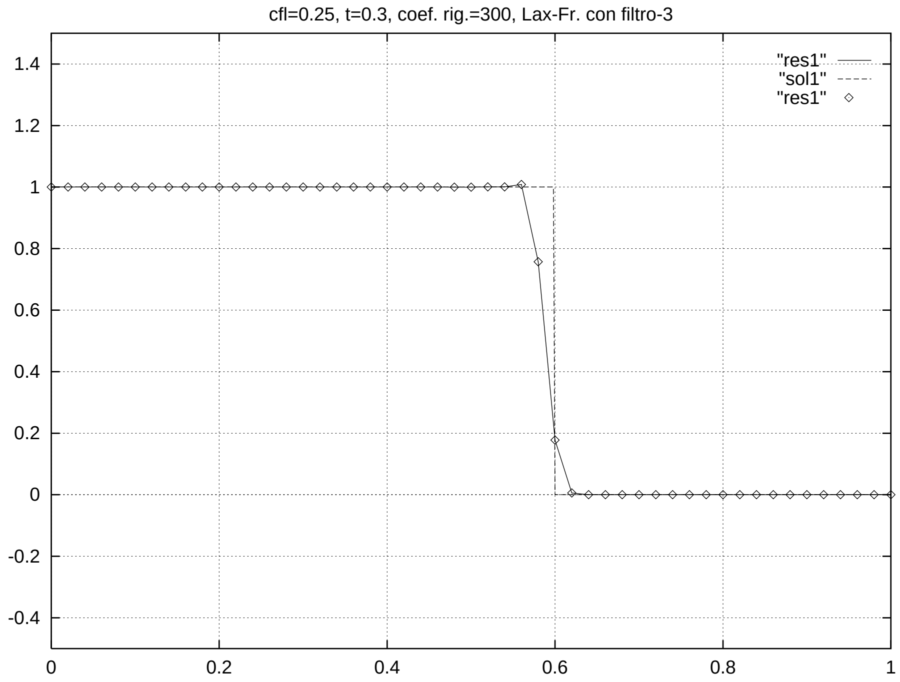

Figura 5:

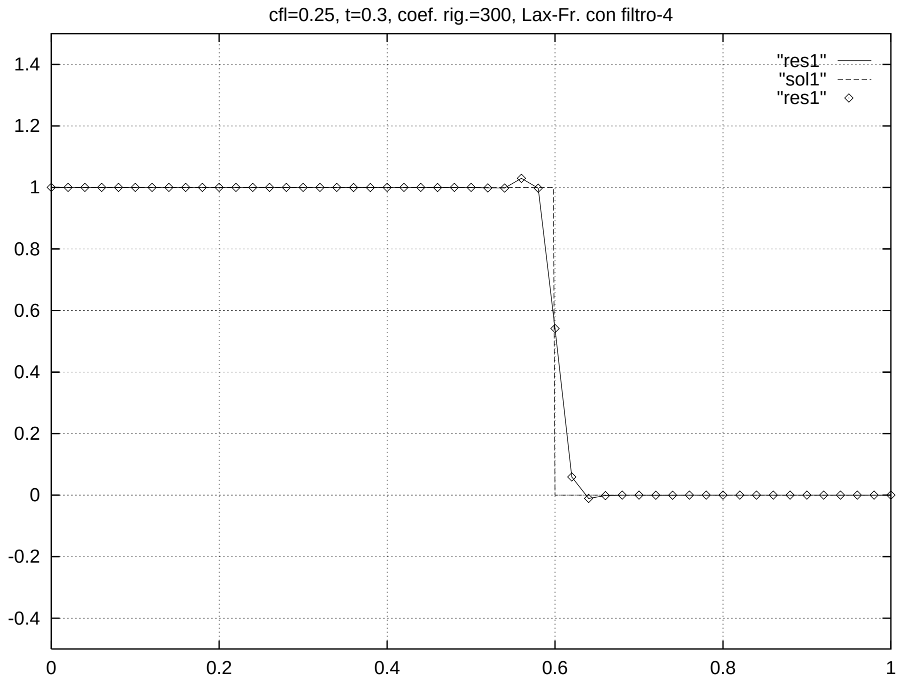

Figura 6: